Stephan Weiss

Die Rechenkästen nach Schott und ihre Simulation

Die Vorgänger: Nepers Rechenstäbe

Im Jahr 1617 veröffentlichte John Napier sein Werk *Rabdologia* und stellte darin Rechenstäbe zum Multiplizieren vor. Ihr Vorteil besteht darin, dass eine Multiplikation durch eine Reihe von Additionen ersetzt werden kann. Die Rechenstäbe enthalten auf allen vier Seiten untereinander die 2- bis 9fachen der oben angegebenen Kopfzahl (Bild 1). Durch jedes Quadrat mit einem Vielfachen, auch Teilprodukt genannt, läuft ein Diagonalstrich von links unten nach rechts oben. Die Teilprodukte sind so geschrieben, dass die Zehnerziffer des Teilprodukts links und die Einerziffer rechts vom Diagonalstrich stehen.

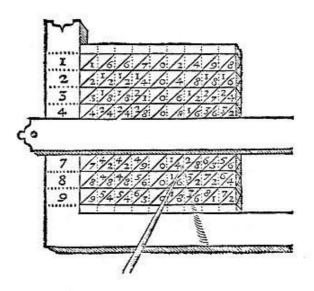


Bild 1: Rechenstäbe nach Neper (aus Marco Locatello: Raddologia. Verona 1623)

Will man eine Zahl multiplizieren, so legt man die Stäbe derart nebeneinander, dass ihre Kopfzahlen ganz oben die Zahl zeigen, die man multiplizieren will. Sodann geht man in die Zeile 2 oder 3 oder 4 usw., je nachdem, mit welcher Zahl man multiplizieren will. In dieser Zeile wird die Ziffer rechts abgeschrieben, alle anderen werden, recht beginnend, immer nur diagonal addiert. Von allen Summen schreibt man wieder nur die Einerziffer auf, die Zehnerziffer wird bei der nächsten Addition berücksichtigt. Bild 2 zeigt das Ablesebeispiel $8563 \times 3 = 25689$.

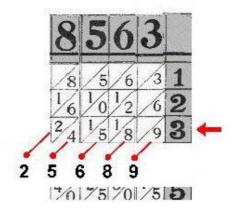


Bild 2: Rechenbeispiel $8563 \times 3 = 25689$

Das Dividieren lässt sich mit den Stäben ebenfalls, jedoch nur eingeschränkt, ausführen.

Zu dieser Zeit gab es keine vergleichbar einfachen Rechenhilfen. Die Rechenstäbe von Neper (das ist sein lateinischer Name) wurden daher mit Lob bedacht und erreichten schnell grosse Bekanntheit. Ein solcher Satz Stäbe hat aber auch einen kleinen Nachteil: die Stäbe liegen lose herum, sie sollten also, vor allem zum Transport, immer in einem Behälter aufbewahrt werden und man muss die benötigten Stäbe vor jeder Rechnung erst auswählen. Diesem Nachteil halfen spätere Erfinder ab, indem sie die Stabbeschriftungen auf drehbaren Scheiben oder Zylindern bzw. Walzen anbrachten, die wiederum miteinander verbunden waren. Von der Bauart mit Walzen sind einige Multipliziergeräte erhalten geblieben. Dieser Bauart gilt unser Augenmerk.

Bauart und Ausführung der Rechenkästen

Der Jesuit Kaspar Schott in Würzburg beschrieb als erster einen solchen "Rechenkasten" mit Walzen, nach der lateinischen Bezeichnung *nova cistula* auch "Rechenkästchen" genannt, in seinem Werk *Organum Mathematicum* von 1668. Bild 3 zeigt dieses Rechenkästchen, Bild 4 einen grossen Rechenkasten aus späterer Zeit.

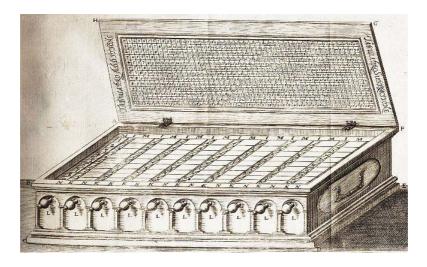


Bild 3: Rechenkasten von Schott (aus Schott, C.: Organum Mathematicum, Würzburg 1668)

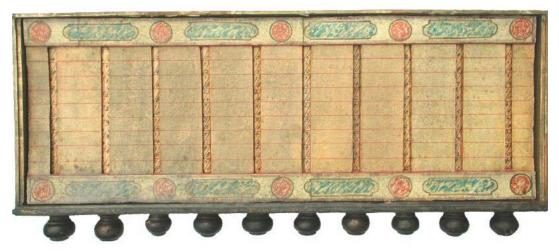


Bild 4: grosser Rechenkasten (Privatbesitz)

In einem Holzkasten sind Walzen parallel nebeneinander angebracht, sie lassen sich mit ihren Knöpfen an der Frontseite drehen. Auf jeder Walze sind alle Vielfachenreihen für die Zahlen 0 bis 9 nebeneinander aufgetragen. Über den Walzen befindet sich eine Abdeckung, eine kleine längliche Öffnung über jeder Walze gibt den Blick auf jeweils nur eine Vielfachenreihe frei.

Will man eine Zahl darstellen, die multipliziert werden soll, so muss man die Walzen solange drehen, bis an jeder Stelle die benötigten Vielfachenreihen zum Vorschein kommen. Die Vielfachenreihen stehen nun nicht mehr auf losen Stäben wie bei Neper, sie werden stattdessen in einem Kästchen zusammengehalten. Mit dieser Anordnung kommt aber auch ein Nachteil zum Tragen: weil die Walzen Platz benötigen liegen die Vielfachenreihen nicht mehr unmittelbar nebeneinander. Das Auge hat keine Führung mehr bei der diagonalen Addition. Der Platz zwischen ihnen wird deshalb durch Querstriche überbrückt.

René Grillet, ein Uhrmacher in Paris, entwarf und baute ebenfalls einen solchen Rechenkasten, der 1678 im *Journal des Sçavans* sowie in einer sehr viel später entdeckten Bedienungsanleitung beschrieben ist. Bild 5 zeigt einen Rechenkasten von Grillet als zeitgenössische Zeichnung. In der Folgezeit bauten auch andere Hersteller solche Kästen.

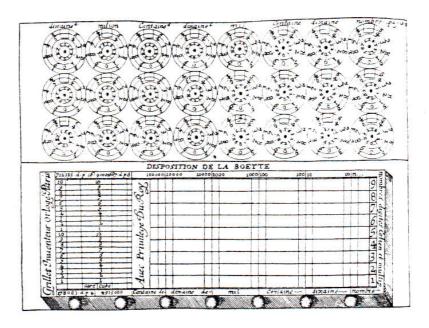


Bild 5: Rechenkasten von Grillet (aus Journal des Scavans 1678)

Die Ausführung der Rechenkästen ist keineswegs einheitlich. Bei Schott sehen wir auf der Innenseite des Deckels eine Addiertafel. Sie dient zur Addition beim Ablesen der Ziffern. Heute mag eine Addiertafel unnötig erscheinen, damals war sie eine Rechenhilfe, weil der Benutzer damit ohne oder mit nur geringen Kenntnissen die Rechnungen ausführen konnte. Grillet stattete sein Kästchen mit mehreren Addierscheiben als Addierhilfe aus. Er brachte zudem weitere Rechenhilfen an.

Am Rechenkasten eines anderen Herstellers findet man auf der Abdeckung die Zusatztabelle zum Wurzelziehen, wie sie Neper entworfen hatte. Die Anzahl der Walzen variiert, je grösser ihre Zahl ist umso grösser kann auch die dargestellte Zahl sein.

Die verwendeten Materialien sind Holz und Papier, Messing und Silber zusammen kommen ebenfalls vor.

Die erhaltenen Rechenkästen sind klein gebaut, kleiner als eine Handfläche, damit man sie leicht mitführen kann. Dem Verfasser ist aber auch ein sehr grosses 'stationäres' Instrument mit mehr als 70 Zentimeter Breite bekannt.

Die Anwendung mit der Simulation

Der Verfasser hat die Simulation eines Rechenkastens für den Flash-Player von Adobe programmiert. Sie stellt einen Rechenkasten mit 6 Walzen und mit der Zusatztabelle zum Berechnen von Quadratwurzeln dar (Bild 6).

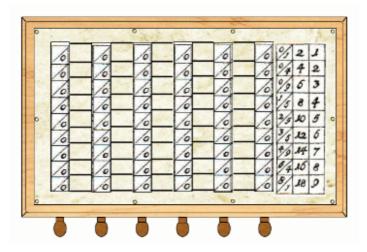


Bild 6: Die Simulation des Rechenkastens

Vorlage hierfür war ein Rechenkasten in der Online-Ausstellung des Science Museums London. Die Arbeitsfläche ist vergrössert dargestellt damit sie auf dem Bildschirm deutlich sichtbar bleibt. Es war deshalb nicht mehr möglich, den Deckel einschliesslich einer Addiertabelle darzustellen. Die Addiertabelle kann gesondert und zusätzlich zur Simulation aufgerufen werden. Die Walzen dreht man durch Anklicken ihrer Knöpfe an der Vorderseite des Kastens mit der Maus. Mehr lässt sich an der Simulation nicht verstellen.

Auf einer Simulation Rechnungen ausführen vermittelt einen besseren Eindruck vom Gebrauch des Gerätes oder der Maschine als dies jede Beschreibung vermag. Das Rechenbeispiel $8563 \times 3 = 25689$ wie zuvor mit den Stäben gezeigt ist in Bild 7 nochmals am Rechenkasten dargestellt.

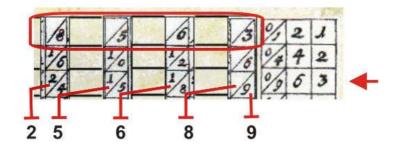


Bild 7: Multiplizieren mit dem Rechenkasten

Interessanter als eine Multiplikation ist die Berechnung der Quadratwurzel. Als Beispiel berechnen wir $\sqrt{61009}$ =247 mit Hilfe des Rechenkastens. Die Niederschrift der Zwischenrechnungen sowie die Einstellungen und Ablesungen am Rechenkasten sind in Bild 8 dargestellt. Die Anordnung der Zwischenrechnungen ist in moderner Schreibweise ausgeführt und entspricht nicht der Art wie man das früher gemacht hat.

Rechts neben den Ausschnitten der Walzen ist auf der Arbeitsfläche eine Tabelle angebracht, die man zum Wurzelziehen benötigt. Sie enthält von rechts nach links eine Spalte mit den Zahlen 1 bis 9 (in Bild 8 oben zusätzlich mit n markiert), links daneben eine Spalte mit dem zweifachen der Zahlen von rechts (im Bild mit 2n markiert) sowie eine Spalte mit den Quadratzahlen (im Bild oben mit n^2 markiert) Die Quadratzahlen sind in

der gleichen Art geschrieben wie die Vielfachen auf den Rechenstäben, nämlich zu beiden Seiten der Diagonalen.

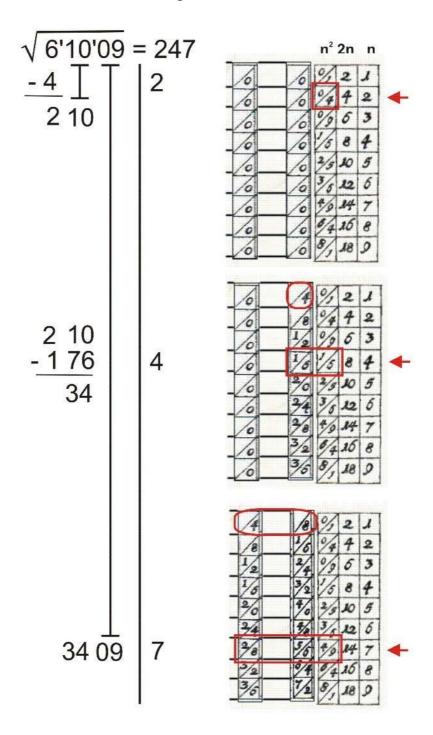


Bild 8: Berechnung von $\sqrt{61009}$ = 247 mit dem Rechenkasten, Erläuterung im Text

Der Radikand (das ist die Zahl unter der Wurzel, hier 61009) wird zuerst von rechts nach links in Gruppen zu zwei Ziffern geteilt. Dann beginnt man mit der linken Gruppe (hier 6) und sucht eine Zahl, deren Quadrat dieser 6 möglicht nahe konnt. An der Tabelle kann man ablesen, dass dies für 2 zutrifft, denn es gilt 2×2=4. Damit steht mit 2 schon die erste Ziffer im Ergebnis fest. Das Quadrat von 2 wird von 6 abgezogen und wir erhalten 2.

Als nächster Schritt folgt ein Ablauf, der sich stets wiederholt: neben das bisherige Ergebnis der Subtraktion (jetzt 2) schreibt man die nächste Zifferngruppe und erhält 210. Das bisherige Ergebnis der Wurzelrechnung 2 wird verdoppelt, dazu dient die mittlere Spalte auf der Zusatztabelle, und auf der nächsten Walze neben der Hifstabelle eingestellt. Wir stellen also 4 ein. Sodann sucht man auf der Zusatztabelle diejenige Zahl, die in den Quadraten mit Diagonalstrich der neuen Zahl 210 am nächsten kommt. Es ist dies 176 mit der zugehörigen 4 als zweiter Ziffer im Ergebnis. 176 wird von 210 abgezogen und ergibt 34.

Jetzt wiederholt sich der Vorgang: zu 34 wird die nächste Zifferngruppe im Radikanden gesetzt, wir erhalten 3409. Zudem wird das Doppelte des bisherigen Ergebnisses der Wurzelrechnung (48=2×24) an den Walzen neben der Hilfstabelle eingestellt. Nun geht es wieder darum, in den Quadraten mit Diagonalstrich eine Zahl zu finden, die der 3409 am nächsten kommt. Es ist dies genau 3409 zu 7. Damit ist die Rechnung beendet, 7 ist die letzte Ziffer im Ergebnis. Wir erhalten $\sqrt[4]{51009}$ =247.

Die Abfolge der Rechenschritte ist schwieriger zu erklären als die Ausführung selbst. Wer dieses Verfahren einmal beherrscht kann leichter und schneller Wurzeln berechnen als dies mit Papier und Schreibzeug allein möglich ist. Bemerkenswert an diesem Verfahren ist zudem, dass es sich nur auf Additionen und Subtraktionen stützt. Neper hat auch hier sein Ziel erreicht und sogar das Berechnen von Wurzeln auf Additionen und Subtraktionen zurückgeführt.

Eine Ableitung, warum dieses Verfahren richtige Ergebnisse liefert, geben wir nicht. Wir halten uns damit an die Vorgehensweise Nepers, der, ebenso wie seine Zeitgenossen, ohne eine Begründung nur rezeptartig die Ausführung beschreibt.

Lesenswertes zum Thema

Weiss, S.: Die Rechenstäbe von Neper, ihre Varianten und Nachfolger (2007) http://www.mechrech.info

Weiss, S.: Historische Bauanleitungen und Beschreibungen der Rechenstäbe von Neper (2007) http://www.mechrech.info

Williams, M.R.: From Napier to Lucas. The use of Napier's Bones in calculating instruments. In: Annals of the History of Computing, Vol. 5, Nr. 3 (1983). S. 279-296.

Juli 2007