Negative Ziffern als Darstellungs- und Rechenhilfe

Stephan Weiss

Negativ besetzte Bestandteile in der Darstellung einer Zahl findet man sowohl in einigen Zahlwörtern[1] als auch in additiv aufgebauten grafischen Zahlzeichen. Unter den eindimensionalen Systemen von Zahlzeichen ist das römische Additionssystem das bekannteste. In ihm bestimmt die Position eines Zeichens zu einem anderen ob es addiert oder subtrahiert wird. Mit den Zahlzeichen **I** ≡ 1 und **X** ≡ 10 erhält beispielsweise **XI** den Wert 10 + 1 = 11, während **IX** den Wert 10 – 1 = 9 meint. In der Anordnung und Aufeinanderfolge der Zeichen sind weitere Regeln zu beachten, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

In zweidimensionalen grafischen Zahlzeichen können die Orientierung oder Platzierung eines Elementes festlegen, ob es im Zusammenhang positiv oder negativ zu werten ist.[2]

Dem stehen Positions- oder Stellenwertsysteme gegenüber. In ihnen ergibt sich der Wert der dargestellten Zahl aus der Summe der Produkte der Ziffernwerte mit den Stellenwerten. Ein Beispiel aus dem dezimalen Stellenwertsystem:

$$123 = 1 * 10^2 + 2 * 10^1 + 3 * 10^0$$

Die Stellenwerte, hier 10^0, 10^1, 10^2 sind abhängig von ihrer Position aufsteigend bzw. absteigend festgelegt, die Ziffernwerte, hier 1, 2 und 3, werden stets als positiv angesehen.

Auf den vorausgesetzten positiven Wert einer jeden Ziffer soll hier ausdrücklich hingewiesen werden, weil in der Geschichte des numerischen Rechnens mehrfach auch negative Ziffern in einem Stellenwertsystem vorgeschlagen worden sind.[3] Negative Ziffern müssen gekennzeichnet sein damit sie sich von den positiven unterscheiden. Von ihnen selbst, ihren schriftlichen Repräsentanten und ihrer Verwendung in Rechenhilfen oder als Rechenhilfe, wird im Folgenden die Rede sein.

---

1 In der lateinischen Sprache heisst 18 *duodeviginti* (zwei von zwanzig). Für weitere Beispiele s. Menninger 1958, Bd. 1, S. 86f. Abschn. Rückzählung oder Wikipedia: Signed-digit representation [letzter Zugriff 28.7.2020].

2 Weiss 2017.

3 Zusammenfassend bei Cajori 1928.

Die negative Eins bei Ballantine

Eine einzelne negative Ziffer schlägt John Perry Ballantine 1925 vor. Er wählt die Eins und notiert sie um 180 Grad gedreht: $\rotatebox{180}{1}$

Er ist der Ansicht, die alleinige Wahl der Eins habe einen „gewissen Vorteil" (*certain advantage*). Der Unterschied zwischen einer Subtraktion und einer negativen Zahl sei einfach zu verstehen: 0 - 7 ≡ $\rotatebox{180}{1}$3 (zu lesen als -10 + 3). Des weiteren könne man negative Werte von Logarithmen einfacher schreiben, nämlich an Stelle von 9.69897 - 10 als $\rotatebox{180}{1}$9.69897 (zu lesen als -10 + 9.69897) oder sogar $\rotatebox{180}{1}$.69897 (zu lesen als -1 + 0.69897).

Die Zählwerke früher mechanischer Rechenmaschinen können auf Grund ihrer Bauart negative Zahlen nicht richtig darstellen. Stattdessen wird eine Folge von Neuner bis zum linken Rand des Zählwerks angezeigt. Es erscheinen beispielsweise

…00000 für 0; …99999 für -1; …99998 für -2; …99997 für -3 usw.

Eine vorangestellte negative 1 könne, so Ballantines Meinung, über die Identitäten

-3 ≡ $\rotatebox{180}{1}$7 ≡ $\rotatebox{180}{1}$97 ≡ $\rotatebox{180}{1}$997 ≡ $\rotatebox{180}{1}$99997 usw. (zu lesen als -3 = -10 + 7 = -100 + 97 = -1000 + 997 = -10000 + 9997 usw.) den Zustand im Zählwerk aufklären und damit Verwechslungen vermeiden.

Die Notation der negativen Eins selbst ist unglücklich gewählt. Gerade die Eins mit ihrer schlanken Form ist in den gebräuchlichen Zeichensätzen gedreht von der normalen Stellung nur schwer zu unterscheiden. Eine Kennzeichnung wie sie andere Autoren verwenden ist leichter zu lesen.
Der erste mit der Idee negativer Ziffern war Ballantine nicht.

Die negativ-affirmative Arithmetik von Colson

John Colson (1680 – 1760), britischer Mathematiker und Mitglied der Royal Society of London, fügt in seiner *Negativo-Affirmative Arithmetick* von 1726 zu den positiven Ziffern 1 bis 9 im Dezimalsystem auch negative hinzu, indem er letztere genauso notiert, aber mit einem Strich darüber markiert. Ein Ziffernsatz beinhaltet dann die Elemente $\overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Zur Wahl seines Systems schreibt er

> *Die Nützlichkeit dieser Arithmetik besteht darin, dass sie alle (Rechen-)Verfahren mit grösserer Einfachheit und Eile ausführt als die übliche affirmative Arithmetik, besonders bei grossen Zahlen: und sie unterscheidet sich von der gewöhnlichen Arithmetik hauptsächlich darin, dass sie freizügig negative Zif-*

> *fern neben den affirmativen erlaubt. Diese negativen Ziffern unterscheiden sich von den positiven durch das Zeichen – über ihnen.*[4]

Colsons Überzeugung, sein System sei von Vorteil und bringe Vereinfachungen mit sich, kommt nicht nur an dieser Stelle zum Ausdruck, im Text wiederholt er sie mehrmals. Wir treffen immer wieder auf Gestalter eines neuen Systems, welcher Art auch immer, oder Erfinder, die so sehr mit den Inhalten ihrer Arbeit vertraut sind, dass sie subjektiv nur deren Vorteile sehen, nicht jedoch die Probleme bei Umsetzung und Anwendung. Ich komme am Ende meiner Ausführungen nochmals auf dieses Thema zurück.

Das erste Rechenbeispiel beinhaltet gleich die Umwandlung der negativ-affirmativen Zahl $3\bar{7}09\overline{28}65\bar{7}\overline{396}147\bar{2}$ in eine mit üblicher positiver Schreibweise (Bild 1).

Thus $3\bar{7}09\overline{28}65\bar{7}\overline{396}147\bar{2}$ is one of theſe Numbers, which may be converted into its Equivalent common Number 2308726432039468, in this manner :

$$\begin{array}{r} 3009006503000470 \\ 0700280070961002 \\ \hline 2308726432039468 \end{array}$$

(1.) Write down all the affirmative Figures by themſelves, putting a Cypher in the place of every negative Figure. (2.) Write down all the negative Figures by themſelves, putting a Cypher in the place of every affirmative Figure. (3.) Subtract the laſt Number from the firſt, and the Remainder will be a common Number, equivalent to the given negativo-affirmative Number. See the Operation above.

Bild 1: Konvertierung einer negativ-affirmativen Zahl in eine mit positiver Schreibweise bei Colson

Das gezeigte Verfahren ist äquivalent mit einem anderen, in dem rechts beginnend und nach links fortschreitend eine negative Ziffer durch ihr Komplement zu zehn ersetzt wird und dann die nächste Ziffer links um eins reduziert wird. Das ist nicht die einzige Methode der Konvertierung, er führt noch andere vor.

Die Verwendung eines vollständigen negativen Ziffernsatzes mag Vereinfachungen beim Rechnen mit sich bringen, er hat auch Nachteile. Die notierten Zahlen bleiben eindeutig im Wert aber nicht mehr in ihrer Darstellung. So gilt beispielsweise $123 = 2\overline{77} = 2\bar{8}3 = 13\bar{7}$. Ebenso ergeben sich mehrere Möglichkeiten der Darstellung negativer Zahlen (nicht Ziffern), im Beispiel $-235 = -3\bar{7}5 = \bar{3}65 = \overline{235}$.

4 Colson 1726, S. 161. Alle Übersetzungen vom Verfasser. Colson bezeichnet positive Ziffern als affirmativ.

Dieser erste Entwurf scheint Colson zu umfangreich, seine Anwendung zu komplex gewesen zu sein, denn im Verlauf seiner Ausführungen beschränkt er sich auf einen verminderten Satz negativer Ziffern, den er im Zusammenhang mit einem weiteren Verfahren der Konvertierung vorstellt. Er nennt es *a reduction to small figures* und führt zu einem reduzierten Satz negativ-afirmativer Ziffern, der keine Ziffern 6 bis 9 enthält, weil diese durch $9 \equiv 1\overline{1}$; $8 \equiv 1\overline{2}$; $7 \equiv 1\overline{3}$; $6 \equiv 1\overline{4}$; ersetzt werden.

Mit dem reduzierten Ziffernsatz $\overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ vermindert sich das kleine Einmaleins auf Produkte von 1*1 bis 5*5, wobei jedoch im Ergebnis die negativen oder positiven Werte der Produktfaktoren zu berücksichtigen sind. Ein solches Einmaleins ist in Anhang 1 wiedergegeben. Dieses reduzierte kleine Einmaleins wird später von anderen Autoren zum gleichen Thema ebenfalls als Vorteil herausgestellt.

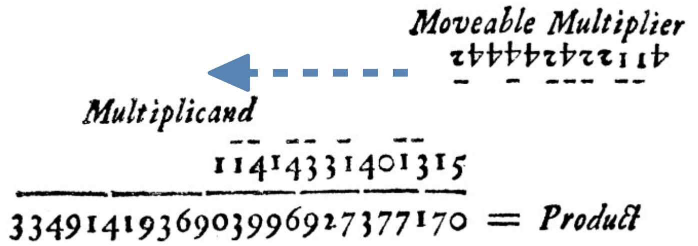
Daran anschliessend erklärt Colson an Rechenbeispielen detailliert die Ausführung der vier Grundrechenarten. In der Multiplikation arbeitet er mit der symmetrischen Multiplikation, deren Grundlage und Verfahren in Anhang 2 erläutert sind.

Die Durchführung einer Multiplikation nach dieser Methode ist in Bild 2 dargestellt. Einer der beiden Produktfaktoren wird auf einen gesonderten Zettel geschrieben. Damit sich zu Beginn der Ausführung die Einerziffern beider Produktfaktoren gegenüber stehen dreht er, wie im Bild zu sehen, den beschriebenen Zettel um, legt ihn rechts oberhalb des zweiten Faktors an und verschiebt ihn, wie mit dem blauen Pfeil angedeutet, stellenweise nach links.

Bemerkenswert an seinen Erläuterungen sind die zunächst ungewohnten Teilprodukte während der Bestimmung der Ziffern im Ergebnis, die er mit aufführt. Colson meint, diese Art der Multiplikation sei so einfach und werde mit etwas Übung so vertraut, dass sie fast schon unmittelbar einsichtig sei.[5]

Das Verschieben eines Zettels, auf dem einer der Produktfaktoren notiert ist, oberhalb des anderen kann man als eine, wenn auch einfache, Mechanisierung des schriftlichen Rechnens ansehen.

5 Colson 1726, S. 161.



Place the moveable Multiplier inverted in ſuch a manner, as that its laſt Figure $\bar{2}$ may be juſt over 5 the laſt Figure of the Multiplicand. Multiply theſe together ($\bar{2} \times 5 = \bar{1}0$) and ſet down the laſt Figure of the Product 0 juſt under, reſerving the firſt Figure $\bar{1}$ for the next place. Then move the Multiplier a place forwarder, ſo that two of its laſt Figures may be over two of the laſt Figures of the Multiplicand, and then Multiplying and collecting you will have $\bar{1} + \bar{2} \times 1 + 4 \times 5 = 17$. Set down 7 in the next place of the Product, and reſerve 1. At the next remove you will have $1 + \bar{2} \times \bar{3} + 4 \times 1 + 4 \times 5 = 31$. Set down 1 and carry 3. Then $3 + \bar{2} \times \bar{1} + 4 \times \bar{3} + 4 \times 1 + \bar{4} \times 5 = \bar{2}\bar{3} = \bar{3}7$. Set down 7 and carry $\bar{3}$. Then $\bar{3} + \bar{2} \times 0 + 4 \times \bar{1} + 4 \times \bar{3} + \bar{4} \times 1 + 4 \times 5 = \bar{3} = \bar{1}7$. Set down 7 and carry $\bar{1}$. And ſo proceed as long as there can be any Figures over one another, and the Product will be found as before.

Bild 2: Die symmetrische Multiplikation, mit den Einern beginnend, bei Colson

Für die Division räumt Colson ein, dass sie nicht so einfach auszuführen sei wie die Multiplikation. Er verwendet hierzu eine Hilfstabelle der 1 bis 5-fachen des Divisors, die zuvor erstellt werden muss.

Am Ende seiner Abhandlung weist Colson auf ein Recheninstrument hin, genannt *Abacus* oder *Counting Table,* das er selbst entwickelt hat und das die Ausführung der Rechenoperationen noch weiter vereinfacht. Es soll demnächst erscheinen. Bisher (Stand August 2020) ist mir über dieses Instrument nichts Näheres bekannt.

Während Colsons System von seinen Nachfolgern nicht übernommen, sondern nur wiederholt neu vorgebracht wurde, wird es heute als Ausgangspunkt für mathematik-historische Betrachtungen ebenso wie für die Erweiterungen des Verständnisses für Zahlendarstellungen in Grund- oder weiterführenden Schulen vorgeschlagen.[6]

6 Tattersall 2011, S. 203.

In den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts organisierte sich eine Gruppe von Studenten der Cambridge Universität unter dem Namen *Colson Socienty* mit dem Ziel, dessen System der Zahlendarstellung zu verbreiten. Sie ersetzten die Markierung der negativen Ziffern mittels eines Überstrichs durch eine Drehung der Ziffern 1 bis 5 um 180 Grad . . Diese nannten sie wegen ihrer doppelten Verwendung, in üblicher Position und gedreht, *two-way numbers*. Auch Zahlwörter für die fünf negativen Ziffern hat man vorgeschlagen: *neg (-1), doub (-2), trip (-3), quad (-4), quin (-5).*[7] Neue Zahlwörter für negative Ziffern werden notwendig, wenn man sie nicht nur schriftlich verarbeitet, sondern auch sprachlich ausdrücken will. Irgendein Einfluss auf die spätere Notation von Zahlen ist aus dem Vorschlag der Gruppe nicht hervorgegangen.

Spätere Autoren

Auf ein Rechenbrett greift John Leslie (1766 – 1832), schottischer Mathematiker und Physiker, zurück. Er beschreibt in seiner *Philosophy of Arithmetic* 1820 u.a. den Gebrauch positiver und negativer Ziffern, sowohl in der materiellen Darstellung auf einer Art Rechenbrett als auch im schriftlichen Rechnen. Bild 3 zeigt links den Übergang der auf einem Brett aufgelegten Zahl 86 in eine geänderte Darstellung als 86=100–10–4. Zur Verwendung kommen volle Kreisen, die positive vorhandene Elemente darstellen sowie Ringe, die negative fehlende Elemente repräsentieren. Fehlende Elemente materiell mittels vorhandener Objekte darzustellen erfordert einiges an Abstraktionsvermögen. Dies gilt umso mehr, als es dem Charakteristikum eines Rechenbretts, nur Vorhandenes zu repräsentieren, widerspricht.

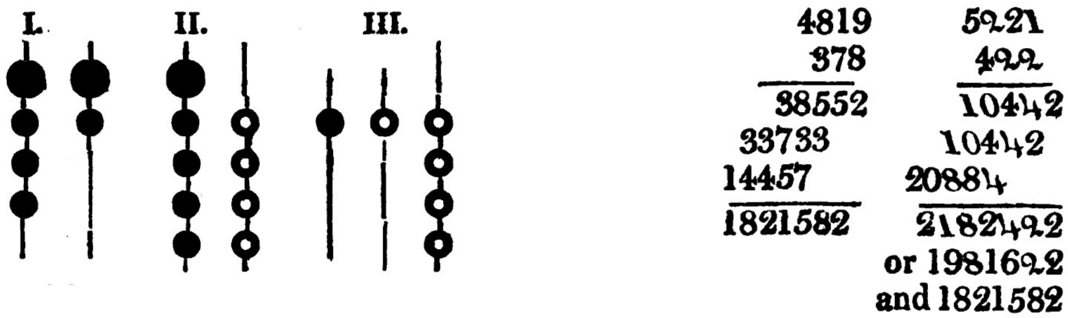


Bild 3: Positive und negative Ziffern bei Leslie

Rechts im Bild sind zwei identische Multiplikationen dargestellt, einmal im positiven und zudem im positiv-negativen System. Negative Ziffern werden in ihrer

7 Tattersall 2011, S. 206.

ursprünglichen Schreibweise, jedoch nach links geneigt, verwendet. Wer unsauber schreibt hat mit Sicherheit Probleme.

Leslie demonstriert nicht nur die Verwendung positiv-negativer Ziffern in den vier Grundrechenarten und im Berechnen der Quadratwurzel, er führt sie auch in Zahlendarstellungen mit anderen Basiszahlen als 10 vor.
Als Argumente für den Gebrauch positiv-negativer Ziffern bringt er die Vereinfachung der Darstellung von Zahlen und der Multiplikation an.

Im Jahr 1840 erscheinen zwei weitere Beiträge[8], die negative Ziffern zum Inhalt haben.
Cauchy wiederholt das System und die Multipliziermethode von Colson 1726, Lalanne stellt die balancierte ternäre Notation vor. In ihr bilden die Ziffern $\bar{1}$, 0, 1 die Grundlage eines Stellenwertsystems zur Basis 3. Für das praktische Rechnen hat es keine Bedeutung.

Die vollkommene Multiplikation bei Seidel

Im Jahr 1823 veröffentlicht Johann Georg Gottfried Seidel eine kleine Schrift, in der er die symmetrische Multiplikation vorstellt, für die er auch ein einfaches Rechengerät entwirft.[9]

Das Rechengerät besteht lediglich aus einer Grundtafel mit Führung und einer horizontal beweglichen Leiste mit Griff, die in der Führung verschoben wird. Auf beiden Bauteilen werden die Ziffern der Produktfaktoren in gleichen Abständen angebracht, entweder mit Hilfe von beschrifteten Täfelchen oder auf auswechselbare Papierstreifen geschrieben.

Bild 4 zeigt den Gebrauch des Gerätes für die Berechnung des Produktes 123 * 123 = 15129. Wichtig ist dabei, dass einer der Faktoren in umgekehrter Reihenfolge seiner Ziffern aufgebracht wird. Die roten Ergänzungen e, z, h für Einer-, Zehner- und Hunderterziffer im Bild verdeutlichen diese Besonderheit.

Zum Gebrauch des Gerätes stellt man die Leiste zunächst in eine Position, in der sich die Einerziffern beider Produktfaktoren gegenüber stehen. Sodann schiebt man die Leiste von rechts nach links bis jeweils mindestens zwei Ziffern oben und unten gegenüber stehen. Im Beispiel sind das 5 Positionen. In jeder Position könnte man die sich gegenüber stehenden Ziffern multiplizieren und ihre Teilprodukte addieren. Man baut auf diese Weise die Ziffern des Ergebnisses wie in Anhang 2 beschrieben vom Einer beginnend auf.

---

8 Cauchy 1840, Lalanne 1840.

9 Seidel 1823, Weiss 2013.

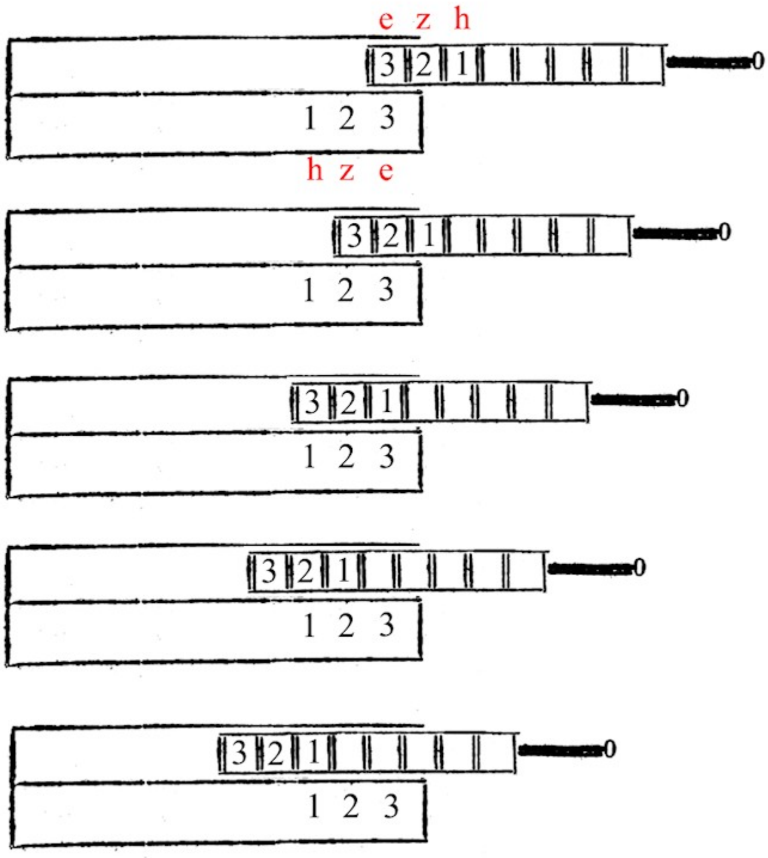


Bild 4: Die Berechnung von 123 * 123 auf dem Multipliziergerät von Seidel

Seidel verwendet auch negative Ziffern, die er in runde Klammern setzt, etwa in 2(1)1 = 200 - 10 + 1 = 191 oder 2(1)(1) = 200 - 10 - 1 = 189. Er arbeitet jedoch nicht nur mit negativen Ziffern, vielmehr baut er ein umfangreiches und komplexes System der Darstellung von Zahlen als Produktfaktoren auf mit dem Ziel, die Beherrschung des kleinen Einmaleins durch fortgesetzte Additionen und Subtraktionen zu ersetzen. Wie ich bereits 2013 geschrieben habe, hat sich sein Vorschlag, die Ersetzung des kleinen Einmaleins durch sein System auch in Schulen einzuführen, zu unser aller Vorteil nicht durchgesetzt.

Der Rechenapparat von Giesing

Mit Seidels Rechenapparat für die symmetrische Multiplikation sehr ähnlich ist der Rechenapparat von Giesing.[10] Er besteht aus einer Tafel, in der eine Leiste verschoben werden kann. Mit dieser Einrichtung ist es möglich, die Ziffern beider

10 Giesing 1884 Tl. 2, DRP26107.

Produktfaktoren Stelle für Stelle gegenüber zu stellen. Der Gebrauch des Apparates wird sowohl in Giesings Veröffentlichung als auch im Patent eingehend beschrieben.

Auf Seite 2 des Patentes links oben weist Giesing darauf hin, dass mit dem Umschreiben eines Produktfaktors mit Hilfe einer negativen 1 (geschrieben $\bar{1}$) und einer negativen 2 (geschrieben $\bar{2}$) grössere Summen beim Addieren der Teilprodukte vermieden werden können (Bild 5). Als Beispiel gibt er das Produkt 63824 * 5396. Dem Verfahren der symmetrischen Multiplikation folgend müsste in den ersten beiden Schritten rechnen
4*6=24 und 2+2*6+4*9=50.

Den Produktfaktor 5396 schreibt er um in $54\bar{1}6$ ($5396 = 5*10^4 + 4*10^3 - 1*10 + 6$). Damit verringert sich die Grösse der Teilprodukte, die dann leichter zu handhaben sind. Damit muss er in den ersten beiden Schritten rechnen
4*6=24 und 2+2*6 - 4*1=10.
Einem geübten Rechner wird diese Umstellung sehr wahrscheinlich keine Vereinfachung bringen.

Bemerkung: Um gröfsere Summen der zu addirenden Producte zu vermeiden, erhöhe man zuweilen die vor einer 8 oder 9 stehende Zahl um eine Einheit und setze an Stelle jener Zahlen $\bar{2}$ bezw. $\bar{1}$, wodurch angedeutet werden soll, dafs die durch Multiplication mit $\bar{2}$ oder $\bar{1}$ entstandenen Producte zu subtrahiren sind.

Beispiel: $63824 . 5396 = 63824 . 54\bar{1}6$.
Niederschrift auf der Tafel:

1. Stellung:

$$\begin{array}{ll} A & 63824 \\ C & \quad\;\; 6\bar{1}45 \\ \hline B & \qquad\;\; 4 \\ & \qquad (2) \end{array}$$

2. Stellung:

$$\begin{array}{ll} A & 63824 \\ C & \quad\;\; 6\bar{1}45 \\ \hline & \qquad 0 \\ & \qquad (1) \end{array} = (2) + 12 - 4 = 10$$

u. s. w.

Bild 5: Multiplikation mit dem Rechenapparat von Giesing

Giesing greift auf die Verwendung von nur zwei negativen Ziffern zurück mit dem Ziel, das Rechnen zu vereinfachen. Ein vollständiges System mit einer neuen Zahlendarstellung baut er nicht auf. Das versucht in konsequenter Weise Eduard Selling an seiner Multipliziermaschine.

Sellings Multipliziermaschine

Eduard Selling war ab 1860 als a.o. Professor der Mathematik an der Universität Würzburg tätig. Unzufrieden mit der Leistung und dem Gebrauch der zu dieser Zeit verbreiteten Rechenmaschinen Bauart Thomas konstruierte er eine Multipliziermaschine nach seinen Vorstellungen. Selling liess seine Maschine erster Bauart[11] im Jahr 1886 in Deutschland patentieren, eine Schrift dazu veröffentlichte er 1887.[12] Weitere ausländische Patente folgten. Das deutsche Patent und seine Schrift sind im Inhalt sehr ähnlich. Erwähnt werden muss, dass Selling auch ein neues System der Darstellung von Zahlen vorschlägt. Zum besseren Verständnis seines Zahlensystems muss kurz auf die Konstruktion der Maschine eingegangen werden.[13]

Eine Multipliziermaschine generiert an jeder Stelle des mehrstelligen Produktfaktors das jeweilige Teilprodukt mit einem anderen einstelligen Produktfaktor. Für das Erzeugen der Teilprodukte verwendet Selling eine Gelenkkette, die auch unter dem Namen *Nürnberger Schere* bekannt ist (vgl. die schematische Darstellung in Bild 6). Sie besteht aus je zwei X - förmig angeordneten Stäben, die in ihrer Mitte gelenkig miteinander und an ihren Stabenden mit anderen Stäben gleicher Anordnung verbunden sind.

Über den Querstäben der Gelenkkette und im rechten Winkel dazu sind mehrere Tastenkörper nebeneinander angebracht (in Bild 6 sind drei von ihnen gelb dargestellt). Jeder trägt nur eine Tastenreihe der Ziffern 0 (unten) bis 9 (oben).[14]

11 Man muss drei Bauarten der Multipliziermaschinen von Selling unterscheiden, nämlich
- die erste Bauart mit ihren Varianten, wie sie hier beschrieben ist,
- die zweite Bauart in Varianten, die ein anderes Zählwerk besitzt (Weiss 2004b) sowie
- eine dritte Bauart als mechanisch-elektrische Maschine, die nur patentiert, jedoch nicht gebaut wurde.

12 Deutsches Reichs-Patent (DRP) 39634 (jetzt DE39634), Selling 1887.

13 Eine ausführliche Beschreibung der Multipliziermaschine erster Bauart habe ich in Weiss 2004a und 2004c gegeben.

14 Es existieren Varianten der ersten Bauart. Die Maschine in Dinglers Pülytechnischen Journal besitzt nur fünf Stellungen für die Zahlen 1 bis 5. (Poppe 1889). Damit soll eine allzu grosse Baulänge der Maschine und damit verbunden ein langer Verschiebeweg der Gelenkkette vermieden werden. Der Nachteil besteht darin, dass Multiplikationen mit Zahlen über 5 in zwei Operationen auszuführen sind, beispielsweise
$z \times 8 = z \times 5 + z \times 3$ oder $= z \times 4 + z \times 4$ oder $= z \times 10 - z \times 2$.
Die Maschine im US-Patent 420667 sieht neun Stellungen für die Zahlen 1 bis 9 vor.

Zu Beginn einer Rechnung ist die Gelenkkette in zusammen geschobenem Zustand. Drückt man eine Taste auf einem Tastenkörper fährt ein Stift nach unten aus, verbindet diesen Tastenkörper mit dem entsprechenden darunter liegenden Querstab und rastet ein.

Das untere Ende der Gelenkkette ist fest mit dem Rahmen verbunden, das frei bewegliche Ende an einem Querstab montiert, der mit einem Griff bewegt werden kann. Schiebt man diesen Griff nach vorn, also vom Bediener der Maschine weg, dann wird die Gelenkkette verlängert und jeder Tastenkörper wird von seinem Querstab, mit dem er verbunden ist, mitgenommen. Gleichzeitig schiebt jeder Tastenkörper eine Zahnstange (in Bild 6 rot markiert) unter das Zählwerk im rückwärtigen Teil der Maschine. Die Querstange kann in mehreren Stellungen, abhängig von der Variante markiert mit 1 bis 5 oder 1 bis 9, einrasten.

Für die Multiplikation einer mehrstelligen mit einer einstelligen Zahl wird zunächst von rechts nach links jede Ziffer der mehrstelligen Zahl auf einem Tastenkörper eingetippt. Der Benutzer schiebt sodann den Griff zur Verlängerung der Gelenkkette nach vorn und rastet ihn in einer Stellung wieder ein, die dem zweiten einstelligen Produktfaktor entspricht (in Bild 6 blau angedeutet). Sind an den Tastenkörpern von rechts nach links die Einerziffer e, die Zehnerziffer z und die Hunderterziffer h eingestellt und der Griff wurde auf den zweiten einstelligen Produktfaktor n gesetzt, dann haben sich die Zahnstangen wegen der Geometrie der Gelenkkette um eine Wegstrecke proportional zu $n*e$, $n*z$ und $n*h$ verschoben. Mit anderen Worten, das System kann gleichzeitig an jeder Stelle die Teilprodukte des kleinen Einmaleins aus dem Wertebereich der Einstellmöglichkeiten abbilden.

Während der Verschiebung der Zahnstangen, also während der Bildung der Teilprodukte, wirken diese auf ein Zählwerk. Es ist im rückwärtigen Teil der Maschine angeordnet, direkt über den verschiebbaren Zahnstangen und besteht aus einem Satz gekoppelter Planetenräder, die die Verschiebungen der Zahnstangen einschliesslich Zehnerübertrag aufaddieren und anzeigen.

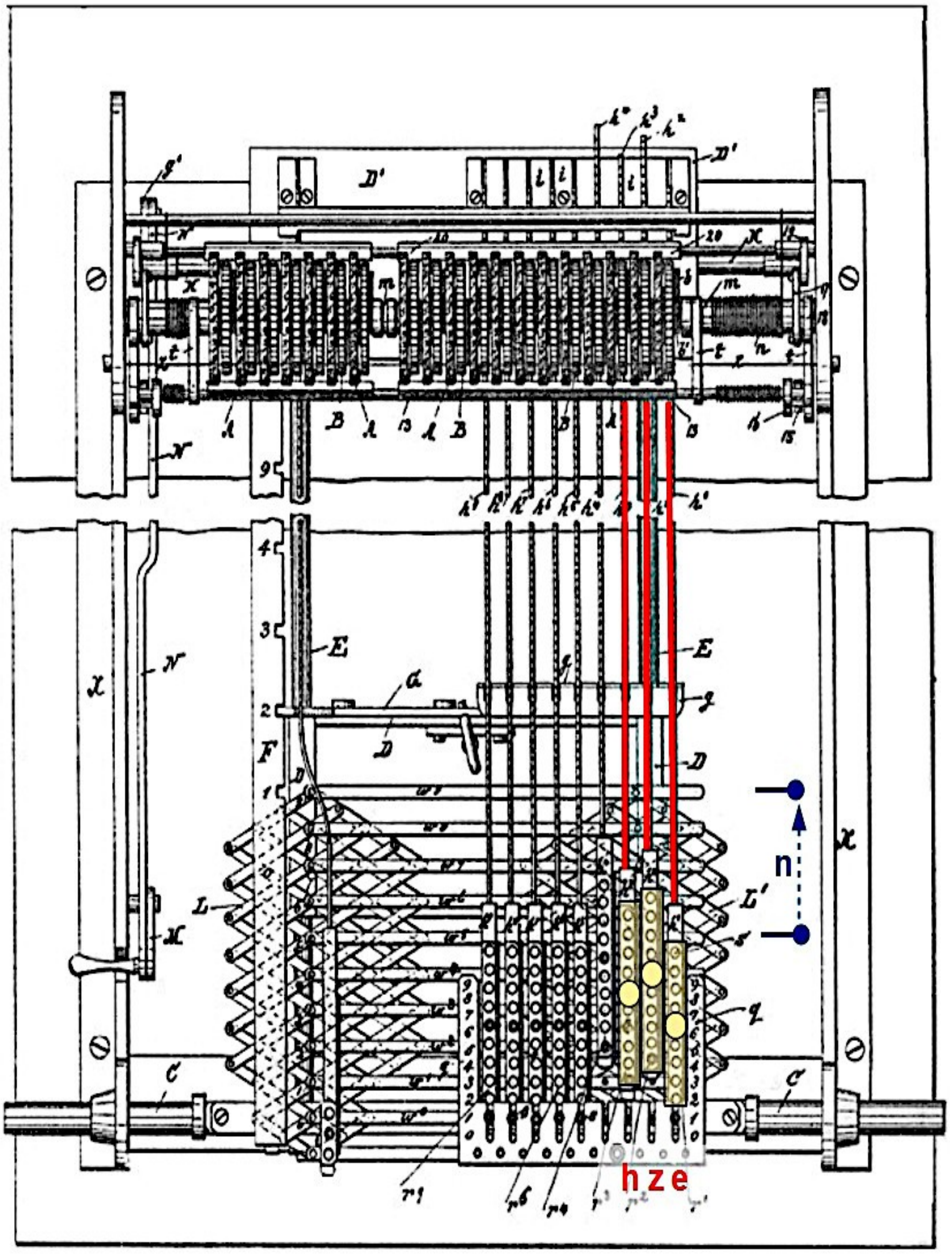


Bild 6: Sellings Multipliziermaschine erste Bauart,
schematische Darstellung

Sellings Vorschlag für ein neues Zahlensystem besteht darin, dass er sich auf die Ziffern 1 bis 5 beschränkt und sie sowohl mit positiven als auch mit negativen Werten belegt. Da in unserem üblichen Dezimalsystem negative Ziffern in Zahlen nicht vorkommen braucht Selling hierfür sowohl neue Zahlzeichen als auch neue Zahlwörter, wenn er sie benennen will. Abgesehen von der oben erwähnten Colson Socienty hat kein Urheber der Idee negativer Ziffern neue Zahlwörter generiert.

Die folgende Tabelle fasst Sellings aussergewöhnlichen Ideen hierzu zusammen:

①	②	③	④	⑤
$\bar{1}$	$\rotatebox{180}{1}$	snie	missein	abein
$\bar{2}$	$\rotatebox{180}{2}$	jes	mizwei	abzwei
$\bar{3}$	$\rotatebox{180}{3}$	jerd	midrei	abdrei
$\bar{4}$	$\rotatebox{180}{4}$	reff	mivier	abvier
$\bar{5}$	$\rotatebox{180}{5}$	niff	mifünf	abfünf

Er markiert die negativen Ziffern anfangs mit einem Strich darüber (Sp. 1), hält dann aber die originalen Zahlzeichen um 180° gedreht für besser (Sp. 2).
Als neue Zahlwörter möchte er zunächst die gebräuchlichen von hinten nach vorn lesen (Sp. 3), hat aber Bedenken und verwendet die alten Zahlwörter mit den Vorsilben *mi(s)* oder *ab* um damit das Subtraktive auszudrücken (Sp. 4 und 5).

Zu seiner Wahl schreibt er, fast beschwichtigend,

> *Ich dachte daran, mit dem Bewußtsein damit das Entsetzen jedes Sprachforschers hervorzurufen, entsprechend den Ziffern auch die Worte eins, zwei,.. umzukehren... Ich glaube jedoch, dass sich der Genius der Sprache solcher Willkür nicht unterwirft und beschränke mich darauf, dem Begriff minus durch eine Vorsilbe auszudrücken, welche in den mir bekannten lebenden Sprachen gleiche Bedeutung hat...* [15]

Selling gibt Erläuterungen und Regeln für das Schreiben, Aussprechen und Umrechnen der neuen Zahlen, die der Benutzer der Rechenmaschine natürlich fehlerfrei beherrschen muss. In zwei der Beispiele hierzu schreibt er

> *Statt* 478 *würde ich schreiben* 5 $\rotatebox{180}{2}\rotatebox{180}{2}$ *und sagen fünf hundert mizwanzig mizwei....*
> oder
> *Die … Zahl* 10.5 $\rotatebox{180}{4}$2.1 $\rotatebox{180}{2}\rotatebox{180}{2}$.$\rotatebox{180}{5}$33 *könnte man aussprechen zehn tausend fünf (hundert) mivier(zig) zwei Millionen ein (hundert) mizwanzig (oder mizwei) tausend mifünf (hundert) drei(ssig) drei. Das Eingeklammerte könnte auch wegbleiben; statt zehn müsste man dann sagen ein null.*[16]

Er hält diese Darstellungsweise für nützlich, weil das kleine Einmaleins nicht wie bisher die Produkte bis 9*9 sondern nur bis 5*5 umfasst und Kinder sich dieses verkürzte Einmaleins leichter einprägen. Allerdings müssen dann zu jedem Produkt die Vorzeichen der Faktoren berücksichtigt werden. Aus technischer Sicht liessen sich an der Rechenmaschine die Verschiebewege der Gelenke in der Gelenkkette verkleinern. Trotz der von ihm propagierten Vorteile räumt Selling einige Seiten später ein

15 Selling 1887, S. 16.

16 Selling 1887, S. 17.

Es ist nicht ausgeschlossen, untermischt mit dieser Schreibweise doch auch gelegentlich 6, 7, 8, 9 zu gebrauchen, besonders links am Anfang einer Zahl, wo dadurch eine Vermehrung der Stellen vermieden wird.

Mindestens eine Multipliziermaschine, die mit dem vorgeschlagenen neuen Zahlensystem arbeitet, wurde auch gebaut. Sie wird im Deutschen Museum München aufbewahrt (Bild 7). Die Gelenkketten stehen senkrecht links und rechts an der Maschine und sind über elf Querstäbe verbunden. Der mittlere Querstab ist fixiert, sodass sich bei einer Bewegung der Gelenkketten gleichzeitig alle Querstäbe von dieser Mitte weg bewegen. Zu den Querstäben gehören die Ziffern (-5), (-4), (-3), (-2), (-1), 0, 1, 2, 3, 4, 5.

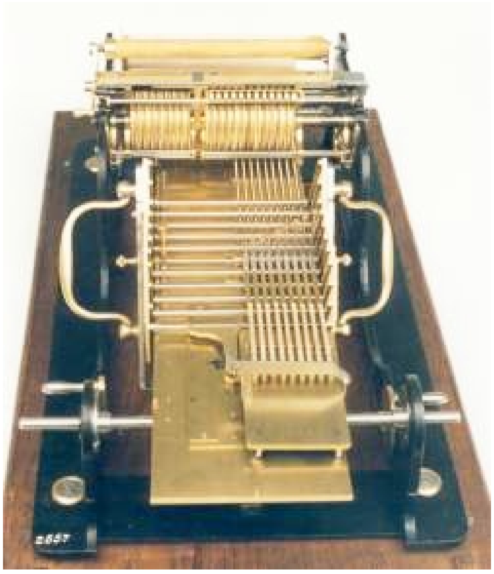


Bild 7: Sellings Multipliziermaschine erste Bauart
für positive und negative Ziffern

Weder die erste noch die zweite Bauart von Sellings Multipliziermaschine konnte sich gegen die Konstruktionen anderer Herstellern durchsetzen. Selling konzentrierte sich zu sehr auf seine Vorgaben im Entwurf und übersah dabei die Prüfung der technischen Ausführbarkeit ebenso wie deren Folgen.

Von allen Entwürfen zur Schreibweise der Zahlen mit Hilfe negativer Ziffern hat sich keiner durchgesetzt. Zu gross wären die Anforderungen an eine Umstellung gewesen. Zahlzeichen, Zahlwörter, Einheiten der Längen-, Flächen- und Volumenmasse und der Gewichte gehören zu den primären und stabilen Kulturgütern, die sich, einmal erlernt, nur sehr schwer ändern lassen.
Nachträglich betrachtet mag uns trotz der Vorteile, die die Erfinder gesehen haben, einiges an Aufwand erspart geblieben sein.

Anhang 1: Das kleine positiv-negative Einmaleins

	+ +/– –	**+ –**
1 * 1	1	$\overline{1}$
1 * 2	2	$\overline{2}$
1 * 3	3	$\overline{3}$
1 * 4	4	$\overline{4}$
1 * 5	5	$\overline{5}$
2 * 2	4	$\overline{4}$
2 * 3	$1\overline{4}$	$\overline{1}4$
2 * 4	$1\overline{2}$	$\overline{1}2$
2 * 5	10	$\overline{1}0$
3 * 3	$1\overline{1}$	$\overline{1}1$
3 * 4	12	$\overline{12}$
3 * 5	15	$\overline{15}$, $\overline{2}5$
4 * 4	$2\overline{4}$	$\overline{2}4$
4 * 5	20	$\overline{2}0$
5 * 5	25	$\overline{25}$, $\overline{3}5$

Die Tabelle gibt das kleine Einmaleins bis 5*5 im positiv-negativen System. In der linken Spalte stehen die Produkte, in der mittleren Spalte (**+ +/– –**) die Ergebnisse für beide Produktfaktoren positiv oder beide negativ, in der rechten Spalte (**+ –**) die Ergebnisse wenn ein Faktor positiv, der andere negativ ist.
Die Ziffern 6 bis 9 treten nicht auf.

Anhang 2: Die symmetrische Multiplikation

Das Besondere der symmetrischen Multiplikation besteht darin, dass bei der Multiplikation mehrstelliger Faktoren die Ziffern des Produkts, mit den Einern beginnend, nacheinander bestimmt werden. Welche Teilprodukte dazu für jede Ergebnisziffer ermittelt werden müssen zeigt Bild 8. Es stellt die Teilprodukte der Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen dar, geordnet nach deren Stellenwerten.

$$
\begin{aligned}
&(h_1*100 + z_1*10 + e_1) * \\
&(h_2*100 + z_2*10 + e_2) = \\
&= 10^4*h_1h_2 \\
&+ 10^3*(h_1z_2 + h_2z_1) \\
&+ 10^2*(h_1e_2 + z_1z_2 + e_1h_2) \\
&+ 10^1*(z_1e_2 + e_1z_2) \\
&+ 10^0*e_1e_2
\end{aligned}
$$

Bild 8: Teilprodukte in der Multiplikation
zweier dreistelliger Zahlen

Demnach ist für die Einerziffer des Ergebnisses zunächst das Teilprodukt Einerziffer des einen Faktors mal Einerziffer des anderen Faktors zu bestimmen. Danach folgt die Zehnerziffer, die sich aus der Summe der Teilprodukte Einerziffer des einen Faktors mal Zehnerziffer des anderen Faktors plus Zehnerziffer des einen Faktors mal Einerziffer des anderen Faktors bestimmt und so weiter. Zehnerüberträge von einem Zwischenergebnis zum nächsten müssen berücksichtigt werden. Die Multiplikation von Faktoren mit mehr als drei Stellen läuft prinzipiell genauso ab wie oben gezeigt, nur die Summen der Teilprodukte sind andere.

Die Ausführung dieser Methode des Multiplizierens als reine Kopfarbeit ohne Hilfsmittel ist anstrengend und in hohem Masse fehleranfällig. Man hat deshalb einfache und wirkungsvolle Ablesehilfen ersonnen. Der eine Produktfaktor wird wie üblich niedergeschrieben. Den zweiten schreibt man in umgekehrter Reihenfolge der Ziffern auf ein bewegliches Element oder einfach nur auf einen Zettel. Dieses Element wird derart über den ersten Faktor gelegt, dass sich zunächst die Einerziffern gegenüber stehen. Sodann wird das bewegliche Element schrittweise von rechts nach links geschoben. In jeder Position, in der sich Ziffern gegenüber stehen bildet man die Teilprodukte aus den jeweils gegenüber stehenden Ziffern und addiert diese. Die Summe ergibt eine Ziffer im Ergebnis. Falls erforderlich muss ein Übertrag auf die nächste Summenbildung übertragen werden.

Colson vereinfacht das Verfahren insofern, als er den beweglichen Faktor in normaler Ziffernfolge auf einen Zettel schreibt und diesen umdreht (s. Bild 2).

Seidel 1823 und Giesing 1884 beschreiben eine für diese Multipliziermethode entworfene einfache Rechenhilfe.

Die Geschichte der symmetrischen Multiplikation einschliesslich ihrer Varianten und der hierfür angepassten Rechenhilfen habe ich in einem früheren Artikel zum Thema ausführlich dargestellt.[17]

17 Weiss 2013.

Bildnachweis

1 Colson 1726, S. 161
2 Colson 1726, S. 168, vom Verfasser ergänzt
3 Leslie 1820, S. 33 (links) und S. 150 (rechts)
4 Nach Seidel 1823, vom Verfasser ergänzt
5 DRP 26107, S. 2 oben
6 Pat. US420667, Fig. 2
7 Deutsches Museum München
8 Vom Verfasser erstellt

Literatur

Ballantine, John Perry, 1925. A Digit for Negative One. In: *The American Mathematical Monthly* Vol. 32, No. 6 (Jun.-Jul. 1925), S. 302

Cajori, Florian, 1928. *A History of Mathematical Notations.* Vol. 1

Cauchy, Augustin, 1840. Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques. *Comptes Rendu Acad. Sci.* 11 (1840), S. 789-798

Colson, John, 1726. A short Account of Negativo-affirmative Arithmetick. In: *Philosophical Transactions Royal Soc.* Vol, XXXIV , N. 396, S. 161-174

Giesing, Carl Julius 1884. *Neuer Unterricht in der Schnellrechen-Kunst.* 1. Tl.: Methode der symmetrischen Multiplication, Division und Wurzelausziehung. 2. Tl.: Anweisung zum Gebrauch eines auf diese Methode gegründeten Rechenapparates. Döbeln

Lalanne, Léon, 1840. Note sur quelques propositions d'arithmologie élémentaire. *Comptes Rendu Acad. Sci.* 11 (1840), S. 903-905

Leslie, John, 1820. *The Philosophy of Arithmetic*

Menninger, Karl, 1958. *Zahlwort und Ziffer, eine Kulturgeschichte der Zahl*. Bd. 1: Zählreihe und Zählsprache, Bd. 2: Zahlschrift und Rechnen

Poppe, Adolph, 1889. Sellings Rechenmaschine. In: *Dinglers Polytechnisches Journal,* 271. Bd., 1889, S. 193 – 205
URL http://dingler.culture.hu-berlin.de/article/pj271/ar271033 [letzter Zugriff 10.8.2020]

(Seidel, Johann Georg Gottfried), 1823. *Die Multiplikazion in ihrer vollkommensten Gestalt...* Dresden
URL http://mdz-nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082455-2 [letzter Zugriff 10.8.2020]

Selling, Eduard, 1887. *Eine neue Rechenmaschine*. Berlin

Tattersall, J.J., 2011. Two-Way Numbers and an Alternate Technique for Multiplying Two Numbers. In: Jardine, Dick and Shell-Gellasch, Amy (Eds): *Mathematical Time Capsules – Historical Modules for the Mathematics Classroom*

Weiss, Stephan, 2004a. *Die Multipiziermaschinen von Eduard Selling.* Tl. 1
URL http://www.mechrech.info/publikat/Selling1.pdf [letzter Zugriff 10.8.2020]

Weiss, Stephan, 2004b. *Die Multipiziermaschinen von Eduard Selling.* Tl. 2
URL http://www.mechrech.info/publikat/Selling2.pdf [letzter Zugriff 10.8.2020]

Weiss, Stephan, 2004c. *Die Multipiziermaschinen von Eduard Selling. Nachtrag*
URL http://www.mechrech.info/publikat/SellingNach.pdf [letzter Zugriff 10.8.2020]

Weiss, Stephan, 2013. *Die symmetrische Multiplikation – Johann Georg Gottfried Seidel und sein Multipliziergerät*
URL http://www.mechrech.info/publikat/Seidel-Multiplikazion.pdf [letzter Zugriff 10.8.2020]
engl. *Symmetrical Multiplication – Johann Georg Gottfried Seidel and His Multiplication Device*
URL http://www.mechrech.info/publikat/Seidel-Multiplikazion_eng.pdf [letzter Zugriff 10.8.2020]

Weiss, Stephan, 2017. Additive und subtraktive Maßangaben am Beispiel der Visierziffern. In: *Maß & Gewicht, Zeitschr. f. Metrologie.* Nr. 124 (Dez 2017), S. 3643-3649
URL http://www.mechrech.info/publikat/MuG-Weiss-Visierziffern.pdf [letzter Zugriff 10.8.2020]

Patente

C. Julius Giesing in Döbeln. Rechenapparat. Deutsches Reichs-Patent (DRP) 26107 (jetzt DE26107). 31. Juli 1883

Dr. Eduard Selling in Würzburg. Rechenmaschine. 16. April 1886. Deutsches Reichs-Patent (DRP) 39634 (jetzt DE39634)

Edward Selling of Wurzburg: Calculating-Machine. Feb. 4, 1890. US-Patent 420667

Aug. 2020
http://www.mechrech.info