Logistische und proportionale Logarithmen

Stephan Weiss

Mit der Geschichte der Astronomie und ihrer Anwendung astronomische Navigation untrennbar verbunden sind die Sexagesimalzahlen. Das sexagesimale Zahlensystem baut auf der Basiszahl 60 auf. Eine Zahl wird geschrieben als Summe der Vielfachen der Potenzen ihrer Basiszahl. Die Vielfachen liegen im Bereich 1 bis 59, sie tragen Markierungen für den Exponenten der Potenz. Andere Schreibweisen für die Hervorhebung der Potenz kommen ebenfalls vor, sind jedoch seltener.

Im praktischen Gebrauch haben sich bis heute als Sexagesimalzahlen die Teilungen des Winkels 1 Grad(°) = 60 Winkelminuten (‘), 1 Minute = 60 Winkelsekunden (‘‘) sowie die Teilungen der Zeit 1 Stunde = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden erhalten. Weitergehende Teilungen[1] sind ebenso unterblieben wie höhere Potenzen, etwa die Zählung des Vollkreises zu 360° als 6 übergeordnete Einheiten (360 = 6*60 = $6^{\mathbf{I}}$).

Diese Zahlendarstellung bringt einen Vorteil mit sich, weil sich mehr Bruchteile ohne Rest darstellen lassen als im Zehnersystem. Dem steht der Nachteil gegenüber, dass das kleine Einmaleins (1..59)*(1..59) = 3481 Teilprodukte umfasst, was Multiplikationen oder Divisionen zweier Sexagesimalzahlen erschwert und eine umfangreiche angepasste Multipliziertafel erforderlich macht. Man nannte diese Hilfstafeln *Tabula Sexagenaria*, *Tabula Sexagesimorum, Canon Hexacontadon* oder ähnlich. In der mathematischen Fachliteratur der beginnenden Neuzeit findet man solche Tafeln einschliesslich einer Art Gebrauchsanleitung.[2] [3]

Nachdem zuerst John Napier 1614 und nach ihm andere Autoren Varianten von Tafeln für das logarithmische Rechnen mit Dezimalzahlen publizierten, lag nahe, Logarithmentafeln auch für Sexagesimalzahlen einzurichten.
Beginnend mit Kepler verwendete man hierfür die Bezeichnung *logistische Logarithmen.*

1 Einige Rechenlehrbücher des späten 18. und beginnenden 19. Jahrhunderts lehren noch Terzen (60‘‘‘ oder 60^{-3}).

2 Weiss, Stephan, 2012. *Reconstruction and Background of Gaspar Schott's Tabula Sexagenaria (1661)*. URL http://www.mechrech.info/publikat/Schott-TabSexa.pdf (letzter Zugriff xx)

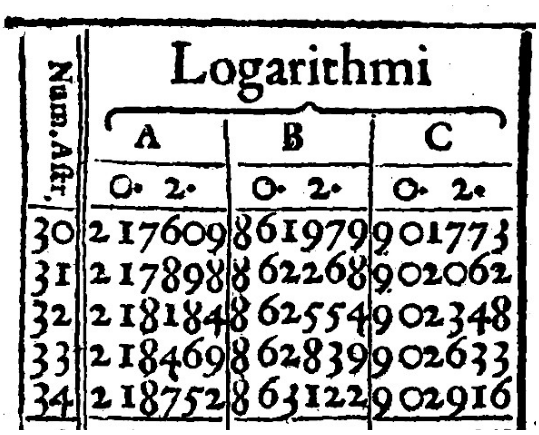
3 Weiss, Stephan, 2012. *Reconstruction of Sebastian Theodoricus: Canon Sexagenarum (1564).* URL http://www.mechrech.info/publikat/TheodoricusCanonRecon.pdf (letzter Zugriff xx)

Eine umfassende Einführung in die Geschichte und die Anwendung der logistischen Logarithmen geben Martin in seiner *Logarithmologia*[4] 1740 sowie Klügel in seinem *Mathematischen Worterbuch*[5] 1808.

An erster Stelle muss hier wie bereits erwähnt der Mathematiker, Astronom und Naturphilosoph Johannes Kepler (1571–1630) genannt werden. In seinen Werk *Rudolphinische Tafeln* ist die Tafel *Heptacosias Logarithmorum Logisticorum* (700 logistische Logarithmen) enthalten.[6]
Er spricht darin von Sexagesimalzahlen als logistischen Zahlen und somit von logistischer Arithmetik und verwendet als erster den Begriff logistische Logarithmen.[7]

Die Tafel gibt für die Eingänge Winkel dessen Sinus als Sexagesimalzahl sowie daneben den Keplerschen Logarithmus des Kerwertes dieses Sinus multipliziert mit 10^5. Zwei weitere Spalten tabellieren das 24-fache des Sinus sowie dessen Kehrwert.

In der überwiegenden Zahl der späteren Tafeln sind die sexagesimalen Eingänge als Bruchzahlen notiert. Eine seltene Ausnahme macht die Tafel von Zimmermann[8] 1691. In ihr stehen die Eingangszahlen sowohl für ganze als auch für gebrochene Sexagesimalzahlen mit unterschiedlicher Bedeutung. Bild 1 zeigt einen Ausschnitt der Tafel.



Num. Astr.	Logarithmi A	Logarithmi B	Logarithmi C
	0. 2.	0. 2.	0. 2.
30	2 17609	8 61979	9 01773
31	2 17898	8 62268	9 02062
32	2 18184	8 62554	9 02348
33	2 18469	8 62839	9 02633
34	2 18752	8 63122	9 02916

Bild 1: Der Anfang der Logarithmentafel bei Zimmermann

---

4 Martin, Benjamin, 1740. *Logarithmologia: The whole doctrine of logarithms, common and logistical, in theory and practice.*

5 Klügel, Georg Simon, 1808. *Mathematisches Wörterbuch,* 1. Abt., 3. Tl., Begriff Logistische Logarithmen.

6 Kepler, Johannes, 1627. *Tabulae Rudolphinae*. Dt. Reichert, Jürgen (Hrsg.), 2014. *Kepler Johannes. Die Rudolphinischen Tafeln.*

7 Kepler 1627, 2014, Kap. I.

8 Zimmermann, Johann Jacob, 1691. *Logistica Astronomo-Logarithmica, Das ist: Die in Logarithmische Tabellen verfassete Sexagen-Rechnung.*

Für die beiden Eingangszahlen 2 (Zeile oben) und 30 (Spalte links) gilt in den Spalten
- A: $(2*60 + 30) = 150$; $\log_{10}(150) = 2{,}17609$;
- B: $(2/60 + 30/3600) = 0{,}041666$; $\log_{10}(0{,}041666) + 10 = 8{,}61979$;
- C: $(2*60 + 30)/(24*60) = 0{,}104166$; $\log_{10}(0{,}104166) + 10 = 9{,}01773$;
  oder, in anderer Darstellung,
  $= \log_{10}(\text{Minuten}/1440)$, hier mit Stunden und Minuten als Eingang, bezogen auf die 1440 Minuten pro Tag.

Die Tafel diente wie alle ähnlich aufgebauten für die Vereinfachung von Proportionsrechnungen. In der Astronomie hat man Beobachtungen ebenso wie physikalische Zusammenhänge zumeist in Proportionen dargestellt.
Berechnungen erfolgen über den Ansatz $a / b = x / c$ mit a, b und c als gegebenen Werten der Winkel oder als Zeitangaben und x als dem gesuchten Wert, der sich aus $x = a * c / b$ bzw. $\log(x) = \log(a) + \log(c) - \log(b)$ errechnet.

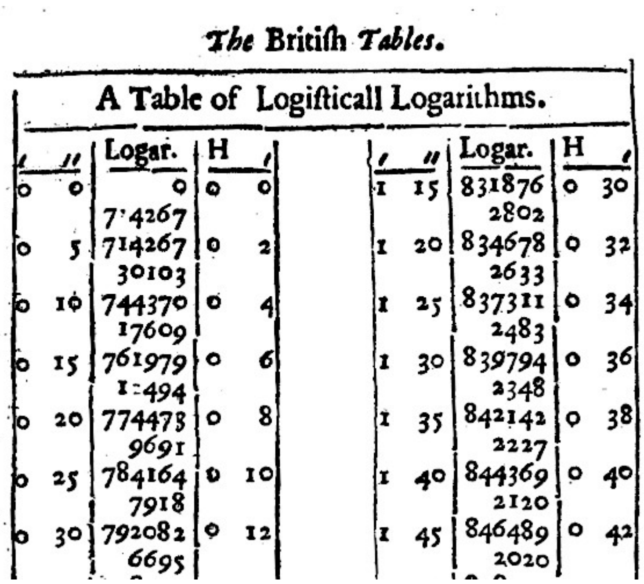
Um die Zahl der Berechnungsschritte Eingang in die Tafel, Ablesen, Addieren und Subtrahieren, nochmaliger Eingang in die Tafel zu verringern lag nahe, ein der Proportionalrechnung angepasstes Logarithmensystem zu tabellieren.

Als Erfinder dieses Verfahrens gilt der Astronom und Mathematiker Jeremy Shakerley (1626–1655?). Er veröffentlichte 1653 die *British Tables*[9], ein Lehr- und Arbeitsbuch der Astronomie, das eine solche angepasste logistische Logarithmentafel enthält.
Gleich in der Einleitung weist Shakerley darauf hin, dass der Leser nicht völlig ungeübt sein sollte im Rechnen („*...Vulgar Arithmetick, & that which is called Logisticall Sexagenary*“), weil er Multiplikationen und Divisionen mit Sexagesimalzahlen lehrt und eine Methode zeigt, die nicht auf einer sexagesimalen Multipliziertafel aufbaut, sondern die diese Rechnungen mit Hilfe einer neuen Tafel der logistischen Logarithmen erleichtert („*...by help of a new Table of Logistical Logarithmes.*“)[10]. Auch bei ihm weist das Adjektiv logistisch auf Sexagesimalzahlen hin.

Bild 2 zeigt den Anfang der Tafel bei Shakerley.

9 Shakerley, Jeremy, 1653. *Tabulae Britannicae: The British Tables.*

10 Shakerley, 1653, S. 2.



The Britifh Tables.

A Table of Logifticall Logarithms.

′	″	Logar.	H	′	′	″	Logar.	H	′
0	0	0	0	0	1	15	831876	0	30
		7'4267					2802		
0	5	714267	0	2	1	20	834678	0	32
		30103					2633		
0	10	744370	0	4	1	25	837311	0	34
		17609					2483		
0	15	761979	0	6	1	30	839794	0	36
		1:494					2348		
0	20	774473	0	8	1	35	842142	0	38
		9691					2227		
0	25	784164	0	10	1	40	844369	0	40
		7918					2120		
0	30	792082	0	12	1	45	846489	0	42
		6695					2020		

Bild 2: Der Anfang der Logarithmentafel bei Shakerley

Sie enthält von links nach rechts die Spalten der Winkel in Minuten(‘) und Sekunden(“), daneben einen logistischen Logarithmus (Logar.), darunter die Differenz zum nächsten Wert, sowie rechts daneben Stunden(H) und Minuten(‘) für Berechnungen mit Zeitangaben.
Die Eingangswerte der Winkel erstrecken sich von 0‘ 0“ bis 60‘ 00“ in Stufen von 5“ und anschliessend von 1° 0‘ 0“ bis 1° 11‘ 60“ in Stufen von 10“.

Shakerley gibt keine Erklärung nach welchem Verfahren er seine Logarithmen berechnet hat. Martin ergänzt hierzu für die Eingänge a aus der linken Spalte der Tafel

$\mathrm{lologSha}(a“) = \log_{10}(a“) – \log_{10}(3600“) = \log_{10}(a/3600)$; mit $\log_{10}(3600) = 3{,}5563$;[11]

Die Eingänge Grad, Minuten und Sekunden werden zu Sekunden zusammengefasst, die als Argumente für die Logarithmusfunktion dienen.

Für die Eingänge z aus der rechten Spalte der gleichen Zeile gilt

$\mathrm{lologSha}(z') = \log_{10}(z') – \log_{10}(1440') = \log_{10}(z/1440)$;
mit $\log_{10}(1440) = 3{,}15863$ und $1440 = 24*60$ als Anzahl der Minuten in 24 Stunden.

Die Eingänge Stunden und Minuten werden zu Minuten zusammengefasst.

Nachfolgend einige Beispiele für die Berechnung von Tafelwerten bei Shakerley.

lologSha(0“) ist wegen log(0) nicht definiert und nicht null wie in der Tafel;
lologSha(5“) = log(5) – log(3600) = -2,85733 = 7,14267 – 10;

11 Martin 1740, S. 93ff. Hier benennt lologSha() den logistischen Logarithmus vom Typ Shakerley. Der geneigte Leser möge mir diese umständliche Wortbildung für eine Funktionsbezeichnung nachsehen, aber ich muss zwei ähnliche Varianten des logistischen Logarithmus unterscheiden und zudem war und ist sie nicht in Gebrauch.

oder, in der gleichen Zeile

lologSha(2') = log (2) – log(1440) = -2085733;
lologSha(30‘) = log(1800) – log(3600) = -0,30103 = 9,69897 – 10;
lologSha(1°) = log(3600) – log(3600) = 0; hier gesetzt = 10,000000 – 10;

oder, in der gleichen Zeile

lologSha(24^h) = log(24*60) – log(24*60) = 0;
lologSha(1°5‘) = log(3900) – log(3600) = 0,03476 = 10,03476 – 10;

Mit Shakerleys Ansatz sind die Logarithmen innerhalb von 1“ bis 59‘ 59“ negativ. Für einen ganzzahligen Tafelwert wird zum Ergebnis 10 addiert und dann mit 10^5 multipliziert.

Ein Rechenbeispiel verdeutlicht die Anwendung der Logarithmen nach Shakerley:

„Precept 4. If the Sun in one day move 59m. 37sec. how much moves he in 21hor, 39m. Adde the Logarithmes of 21hor. 39m. and 59m 37sec. together; the sum (subtracting the Radius) is the Logarithme of 53m. 46sec.“[12]

Shakerley verwendet hier sowohl die Tafeleingänge für Winkel als auch die Tafeleingänge für Stunden und Minuten. Es gilt die Proportion

(59'37"/24^h) = (x/21^h39') mit der Einheit Winkel/Zeit.

Er rechnet

log(x) = log(21^h39') + log(59'37") – log(24^h).

Die Nachrechnung deckt auf, dass er interpoliert.

Für Proportionsrechnungen stellt diese Tafel insofern eine Vereinfachung dar, als die Winkel im Eingang in Minuten und Sekunden angegeben sind und log(60‘) bzw. log(24^h) = 10 gesetzt wurde, wodurch sich der Rechenaufwand für Proportionen, die auf einer dieser Basiszahlen aufbauen, verkürzt.

Shakerleys Tafel der logistischen Logarithmen hat sich nicht durchgesetzt. Der Grund liegt in einem besseren Ansatz, den ein anderer Autor verfolgte.

Erfolgreicher war der englische Astronom Thomas Street (auch Streete, 1621–1689) mit seiner *Tabula Logarithmorum Logisticorum*[13]

Er verwendet die Umrechnung

lologStre(a“) = $\log_{10}$(3600“) – $\log_{10}$(a“) = $\log_{10}$(3600/a);
mit $\log_{10}$(3600) = 3,5563;[14]

In Bild 3 ist der Anfang der Tafel von Street 1705 dargestellt.

12 Shakerley, 1653, S. 5. Ich beschränke mich auf einfache Beispielrechnungen, weil fachspezifische Rechnungen gute Kenntnisse in Astronomie voraussetzen.

13 Street, Thomas, 1661 u.ö. *Astronomia Carolina, nova theoria motuum coelestium.*

14 lologStre() benennt den logistischen Logarithmus vom Typ Street.

204

TABULA LOGARITHMORUM LOGISTICORUM.

′	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
″	0	60	120	180	240	300	360	420	480	540
0	——	17782	14771	13010	11761	10792	10000	9331	8751	8239
1	35563	17710	14735	12986	11743	10777	9988	9320	8742	8231
2	32553	17639	14699	12962	11725	10763	9976	9310	8733	8223
3	30792	17570	14664	12939	11707	10749	9964	9300	8724	8215
4	29542	17501	14629	12915	11689	10734	9952	9289	8715	8207
5	28573	17434	14594	12891	11671	10720	9940	9279	8706	8199
6	27782	17368	14559	12868	11654	10706	9923	9269	8697	8191
7	27112	17302	14525	12845	11636	10692	9916	9259	8688	8183
8	26532	17238	14491	12821	11619	10678	9905	9249	8679	8175
9	26021	17175	4457	12798	11601	10663	9893	9238	8670	8167
10	25563	17112	14424	12775	11584	10649	9881	9228	8661	8159
11	25149	17050	14390	12753	11566	10635	9865	9218	·652	8152

Bild 3: Der Anfang der Logarithmentafel bei Street

Über den Spalten stehen Winkelminuten, nach unten folgen die Logarithmen des Winkels aus der Winkelminute oben und der Winkelsekunde in dieser Zeile ganz links. Zusätzliche Eingänge für Stunden und Minuten sind nicht vorhanden.

Die Eingangswerte erstrecken sich von 0‘ 0“ bis 60‘ 00“ in Stufen von 1“.

Einige Beispiele für die Berechnung von Tafelwerten:
lologStre(0“) ist nicht definiert wegen log(0);
lologStre(5“) = log(3600) – log(5) = 2,85733;
lologStre(30‘) = log(3600) – log(1800) = 0,30103;
lologStre(1°) = log(3600) – log(3600) = 0;

Die Logarithmen sind von 1“ bis 59‘ 59“ positiv und werden mit zunehmendem Winkel kleiner bis lologStre(1°) = 0 und ab einem Winkel grösser 1° negativ. Tabelliert ist der tatsächliche Logarithmus multipliziert mit 10^4, damit eine Bruchzahl vermieden wird. Zwei Beispiele hierzu:
lologStre(5“) = 28573 ≡ 2,8573; oder
lologStre(59‘) = 73 ≡ 0,0073.

Martin hebt drei Eigenschaften der Tafelwerte positiv hervor, das sind erstens ihre positiven Zahlenwerte, zweitens ohne den Radius minus 10 und drittens in Richtung 1 Grad kleiner werdend.

Die Rechenbeispiele für die Anwendung der Tafel logistischer Logarithmen bei Street sind ausführlich Schritt für Schritt erläutert. Das erste lautet

1° = 60' geben 58'23", wieviel geben 50'42" oder, in Kurzfassung[15]
58'23“/60' = x/50'42“ oder
lologStre(x) = lologStre(58'23“) + lologStre(50'42“) – lologStre(60').

Da Street seine Tafel auf lologStre(60') = 0 ausgerichtet hat verkürzt sich die Berechnung des Ausdrucks.

Seine Zusammenfassung[16]:

	′	″	Log. Logist.
Si 60′. dant	58	23	119
Tunc	50	42	731
dabunt	49	20	850

Spätere Tafeln logistischer Logarithmen übernehmen das System log(3600/a) von Street. Wegen ihres relativ geringen Umfangs sind sie in Zusammenstellungen mit anderen Zahlentafeln enthalten. Eine Ausnahme hiervon macht eine eigenständige Tafel aus dem Jahr 1843.[17] Zeitlich und thematisch geordnete Aufstellungen von Tafelwerken verschiedenen Inhalts bis über die Mitte des 19. Jahrhunderts geben De Morgan[18] und Glaisher[19].

Obwohl bereits gegen Ende des 18. Jahrhunderts Tafeln erschienen, die das Ergebnis einer Proportion mit bestimmten Eigenschaften unmittelbar ohne Zwischenrechnung darstellen, somit den Umweg über Logarithmen entbehrlich machen[20][21], wurden logistische Logarithmen weiterhin publiziert.

Im Laufe der Zeit hat die Benennung logistische Logarithmen einen Bedeutungswandel erfahren, über den sexagesimalen Eingang hinaus. Schon Martin 1740 als auch später Klügel 1808 bezeichnen log(3600“/x) als logistischen Logarithmus. Hinzu kam die neue und naheliegende Bezeichnung als proportionale Logarithmen. Beide Benennungen, logistisch und proportional, sind nicht klar voneinander abgegrenzt.

In einer so genannten Tafel proportionaler Logarithmen aus dem Jahr 1766[22] sind log(10800/a) tabelliert, mit 10800 = 3*3600 als Sekunden in 3 Grad oder 3 Stun-

15 Street 1705, S.68f.

16 Street 1705, S.69. Die Übersetzung aus dem Lateinischen: *wenn 60' geben / dann / sie werden ergeben.*

17 Anon, 1843. *Tafel logistischer Logarithmen. Zugabe zu den Vega-Hülsseschen und anderen Logarithmen-Tafeln. Aus Callet's Tables de Logarithmes.*

18 De Morgan, Augustus. TABLE. *English Cyclopaedia*, 1868, Sect. 4, Vol. 7, S. 976ff.

19 Glaisher, James Whitbread Lee, 1874. Report of the Committee ... on Mathematical Tables. *Report of the forty-third meeting of the British Association for the advancement of science.*

20 Bernoulli, Johann, 1779. *A sexcentenary table: exhibiting at sight, the result of any proportion, where the terms do not exceed 600 seconds or 10 minutes; with precepts and examples.*

21 Taylor, Michael, 1780. *A Sexagesimal Table, Exhibiting, at Sight, the Result of Any Proportion, where the Terms Do Not Exceed Sixty Minutes…*

den und mit der Variablen a in Sekunden. In der Erklärung zur Tafel wird die Verwendung der Logarithmen in Proportionen bei astronomische Berechnungen und für die Navigation hervorgehoben.

Mackay 1804 unterscheidet zwischen logistisch und proportional. In seiner Zusammenstellung von Tafeln[23] gibt er u.a. logistische Logarithmen (Tafel XC *Logistic Logarithms*) als log(3600/a) nach dem System Street ebenso wie proportionale Logarithmen als log(10800/a) (Tafel XLI *Proportional Logarithms*). In beiden Tafeln sind als Eingänge Winkel in Minuten und Sekunden angegeben.

Vega hingegen benennt zu Beginn des 19. Jahrhunderts eine Tafel[24] nach der Methode von Street als *V. Tafel der proportionalen, oder der logistischen Logarithmen für alle einzelne Sekunden eines Grades oder auch einer Stunde.* Im Vorwort führt er aus, dass diese Tafel Verwendung in Proportionalrechnungen findet.

Demnach existierte schon ab dem 19. Jahrhundert keine klare Unterscheidung zwischen den Benennungen als logistische oder proportionale Logarithmen.

In seiner Übersicht zur Geschichte der Rechentafeln ergänzt Glaisher[25], dass eine Tafel mit den Werten log(a/x), a eine Konstante und x eine Variable, logistisch oder proportional genannt wird und dass es eine Tendenz zu geben scheint, den Namen logistische Logarithmen zu verwenden wenn a = 3600“ ist oder proportionale Logarithmen wenn a einen anderen Wert besitzt.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts macht Mehmke[26] keine Unterscheidung mehr und benennt die Werte von log(a/x) mit a konstant, a und x ein in Sekunden ausgedrückter Winkel, als logistische oder proportionale Logarithmen.

Für die Navigation werden Tafeln mit proportionalen Logarithmen bis in die Mitte des 20. Jahrhunderts verwendet. Danach übernehmen elektronische Geräte diese Aufagbe.

22 Great Britain: Comm. of Longitude, 1766. *A Table of Proportional Logarithms; To be used with the Astronomical and Nautical Ephemeris.*

23 Mackay, Andrew, 1804. *A Collection of Mathematical Tables : For the Use of Students in Universities and Academies, for the Practical Navigator, Geographer, and Surveyor, for Men of Business, &c.*

24 Vega, Georg von, 1814. *Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln,* 2.Bd. 3. Aufl.

25 Glaisher 1874. Abschn. §3, Art. 18. Logistic and Proportional Logarithms.
Ders., Logarithm - Logistic or Proportional Logarithms. *Encyclopædia Britannica,* 1911, Vol. 16, S. 875.

26 Mehmke, Rudolf, 1902. Numerisches Rechnen. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen;* 1 Tl. 2, S. 986, FN 227.