Die proportionale Definition des Logarithmus

Stephan Weiss

Die Idee der Logarithmen als Arbeitshilfe in der Arithmetik durchlief über Jahrhunderte hinweg Modifikationen und Anpassungen. Dies gilt sowohl für ihre Definition selbst als auch für den Umfang und die Inhalte der Zahlentafeln. In der Literatur zu diesem Thema findet man zahlreiche historische Querschnitte ebenso wie Bearbeitungen zu diversen Einzelthemen.

Die folgenden Ausführungen schliessen an meinen Beitrag zur Geschichte der Logarithmen aus dem Jahr 2013 [42] an. Sie haben zum Ziel, anhand der historischen Literatur zunächst den Ursprung und die Varianten der ersten Definition des Logarithmus zu erläutern. Anschliessend wird deren Übergang in die spätere Definition verfolgt. Dabei wird sich zeigen, dass die ältere Definition über lange Zeit hinweg als Erklärungsmodell für Logarithmen verwendet worden ist.

Eine Vollständigkeit in der Reihenfolge und in der Ausgestaltung der Logarithmentafeln war nicht beabsichtigt, weil nicht notwendig, weshalb Quellen hierzu auch nur genannt werden, soweit dies unbedingt erforderlich ist.

Erste Ansätze

Ausgangspunkt für die Erfindung der Logarithmen sind die Gesetzmässigkeiten in der Gegenüberstellung der Elemente einer geometrischen und einer arithmetischen Zahlenfolge. Sie sind wie nachfolgend gezeigt aufgebaut.

Geometrische Folge	z	$z \bullet q$	$z \bullet q^2$	$z \bullet q^3$	…
Arithmetische Folge	s	$s+d$	$s+2d$	$s+3d$	…

In einer geometrischen Folge wird jede nächste Zahl durch Multiplikation der vorhergehenden mit dem gleichen konstanten Faktor q gebildet.
In einer arithmetischen Folge wird jede nächste Zahl durch Addition einer Konstanten d zu der vorhergehenden gebildet.

Gegenüberstellungen geometrischer und arithmetischer Folgen finden sich schon bei Archimedes (3. Jhd. v. Chr.) [17] und dann wieder in fast allen bedeutenden mathematischen Werken des 15. und 16. Jahrhunderts. [37]

Im 16. Jahrhundert weisen Mathematiker wiederholt mehr oder weniger detailliert auf diese Eigenschaften hin und bereiten damit die Grundlage für die Idee der Logarithmen. Zahlenfolgen werden zu dieser Zeit *Progressionen* genannt, abgeleitet aus dem lateinischen Substantiv *progressio* (Fortschritt, Entwicklung, Steigerung).
Zunächst sollen anhand einer Auswahl von Rechenbüchern aus dieser Zeit die Interpretationen und Schlussfolgerungen ihrer Autoren zu dieser Zusammenstellung analysiert werden.

Bei Gemma Frisius 1556 [10] findet sich die nachfolgende Zusammenstellung mit der geometrischen Folge oben und der arithmetischen darunter.

3.	9.	27.	81.	243.	729.
0.	1.	2.	3.	4	5

Er schreibt dazu

> *„Wenn du 729 mit 243 multiplizierst ergeben sich 177147, die zunächst durch 3 dividiert ergeben 59049. Hier ist diese Zahl auf den neunten Platz gesetzt nach der Ordnung wie die Zahlen unterschrieben sind; ebenso deswegen weil die beiden Zahlen, die den beiden Produktfaktoren untergeschrieben sind, 4 und 5, addiert 9 ergeben.“*[1]

Setzt man die gezeigte Anordnung nach rechts fort dann stehen die Zahlen 59049 über 9 und 177147 über 10. Die geometrische Folge oben beginnt mit 3 und nicht mit 1. Deshalb muss er das Produkt durch 3 teilen, um es an den richtigen Platz zu bringen. Frisius sieht das auch und schreibt weiter unten

> *„Wenn jedoch die erste Zahl der Progression eine eins ist, dann ist das Teilen durch die erste nicht notwendig.“*

Die Erklärung dazu fügt er an.
Hier ist ein Problem angesprochen, das in anderer Formulierung für die Zuordnung der Zahlenfolgen später noch wesentlich werden wird.

Frisius erkennt, wie sich eine Multiplikation durch eine Addition ersetzen liesse. Er spricht nur vom Multiplizieren, ein Anhaltspunkt für andere Regeln des vereinfachten Rechnens sind bei ihm nicht zu erkennen.

Simon Jacob 1565 [18] erklärt den Aufbau beider Folgen und zeigt, wie sie sich erweitern lassen. Die arithmetische Folge steht bei ihm oben, die geometrische unten.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.	384.	768.

Er schreibt dazu

> *„So merck nun / was in Geometria progressione ist Multipliciren / das ist in Arithmetica progressione Addiern / und was dort ist Dividiern / das ist hie Subtrahiern / und was dort*

1 Gemma Frisius [10], S. 33f, Übersetzung der lateinischen Originaltexte vom Verfasser.

mit sich ist Multipliciern / ist hie schlecht Multipliciern / Letztlich was dort ist Radicem extrahiern / das ist hie schlechts Dividiern.“[2]

Mit dieser Feststellung geht Jacob insofern einen Schritt weiter, als er auf die Äquivalenz der vier Rechenarten in beiden Folgen hinweist. Er meint damit den Aufbau und die Fortführung der geometrischen Folge. Eine Multiplikation führt er wie bei Frisius aus.

Christoff Rudolff 1540 [33] führt aus

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.

„Nun merke wenn du zwei Zahlen miteinander multiplizierst / [und] willst wissen die Stelle des Quotienten[?, gemeint ist das Produkt] addiere die Zahlen der natürlichen Ordnung wie sie über den beiden miteinander multiplizierten Zahlen gefunden [werden] / die Summe sagt es dir. Wenn ich 8 multipliziere mit 16 / muss 128 kommen, weil das 3 und 4 wie sie über dem 8 und 16 geschrieben [sind] zusammen addiert 7 machen. Ebenso wenn ich multipliziere 16 mit 16 muss kommen 256 / weil das 4 und 4 machen 8 usw. Das geschieht nicht allein hier / sondern auch mit allen anderen Proportionen.“[3]

Seine Darstellungen sind eingebettet in eine Aufgabe der fortgesetzten Verdoppelung. Nur die Multiplikation wird vorgeführt. Andere Rechenarten liessen sich leicht ableiten. Mit der Gegenüberstellung der Zahl 0 in der arithmetischen Folge zur Zahl 1 in der geometrischen und mit der Wahl des Multiplikators 2 erhält er eine Tabelle der Potenzen von 2. Mit dieser Anordnung kommt er jener bei Michael Stifel schon sehr nahe.

Michael Stifel 1544 [38] stellt ebenfalls zwei Folgen gegenüber und schreibt dazu in einer Ergänzung

Sed oſtendenda eſt iſta ſpeculatio per exemplum.

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Poſſet hic fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportet ut me hic ſubducã, & clauſis oculis abeã. Repetam uero unum ex ſuperioribus, ne fruſtra dicar fuiſſe in campo iſto. Sed ſententia inuerſa repetam quod mihi repetendum uidetur.

„Man könnte hier vielleicht ein ganzes neues Buch über die Wunder der Zahlen schreiben, doch muss ich mich hier fortschleichen und geschlossenen Auges fortgehen. Ich will jedoch eine Sache von den oben besprochenen wiederholen, um nicht den Eindruck zu

---

2 Jacob [18], fol. 14v, 15r. „Schlecht“ bedeutet hier soviel wie schlicht oder einfach nur Multiplizieren und Dividieren.

3 Rudolff [33], fol. unnum., Abschn. *Von einem roß kauff.* Der zitierte Textabschnitt ist wegen seiner schwer verständlichen Diktion im Original hier modernisiert.

> *erwecken, ich sei vergeblich auf diesem Felde gewesen. Doch will ich den Satz umkehren und wiederholen, was mir wiederholt zu werden müssen scheint:*
> *Alles, was die geometrische Progression durch Multiplikation und Division bewirkt, das macht die arithmetische Progression durch Addition und Subtraktion. Beispiel;*
> *Wie 1/8, multipliziert mit 64, dann 8 ergibt, so macht -3, addiert zu 6, dann 3. Es ist aber -3 der Exponent von 1/8, so wie 6 der Exponent der Zahl 64 ist, und 3 ist der Exponent der Zahl 8.*"[4]

Danach folgen zwei weitere Rechenbeispiele, die in das Rechnen mit Brüchen übergehen.

An dieser Erläuterung Stifels sind mehrere Punkte bemerkenswert.
Seine Rechenbeispiele nehmen das Rechnen mit Exponenten voraus. Dabei erweitert er im Gegensatz zu anderen Autoren die Exponenten auf negative Zahlen und die geometrische Folge auf Brüche. Der Begriff Exponent, den er hier erstmals verwendet, ist abgeleitet vom lateinischen Verbum *exponere* (vor Augen stellen, herausstellen, darlegen).
Allerdings kann er so wie angegeben nur rechnen, weil seine Tafel mit der Gegenüberstellung des Exponenten 0 zur Zahl 1 einen Spezialfall darstellt. Auf diese Voraussetzung wird weiter unten näher eingegangen.

Stifels Anordnung ergibt ebenso wie bei Christoff Rudolff eine Tafel der Potenzen von 2 mit ihren Exponenten, obwohl die Annahme einer Basiszahl oder eines Exponenten in einer Potenz nirgendwo explizit zu finden sind.

Die geometrische Folge weist Lücken auf, die mit zunehmendem Zahlenwert immer grösser werden. Für eine brauchbare Rechentafel müssten die Lücken geschlossen, demnach für nicht vorhandene Zahlen in der geometrischen Folge deren Entsprechungen in der arithmetischen Folge berechnet werden. Hierzu äussert sich Stifel nicht, sehr wahrscheinlich nicht, weil ihm das mathematische Werkzeug fehlt. Er lässt dieses Problem „mit geschlossenen Augen" liegen und beschränkt sich, fast beschwichtigend, auf die erkennbaren Eigenschaften.

Vor dem Entwurf einer brauchbaren Rechenhilfstafel nach diesem Prinzip, man könnte sie im Vorgriff schon Logarithmentafel nennen, müssen zunächst die Gesetzmässigkeiten in der Gegenüberstellung der beiden Zahlenfolgen untersucht und allgemein gültig formuliert werden.

Die beiden frühen Tafelmacher John Napier (latinisiert Neper), ein schottischer Theologe und weitaus besserer Mathematiker, sowie Henry Briggs, Mathematiker und Professor für Geometrie am Gresham College in London und später in Oxford, publizieren ihre Erkenntnisse in ihren Logarithmentafeln. Es sind dies Napiers *Descriptio Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio Ejusque usus* (Beschreibung des wunderbaren Kanons der Logarithmen und dessen Gebrauch) [25, 30] aus dem Jahr 1614 sowie Briggs *Logarithmorum chilias prima* (Der Logarithmen erstes Tausend), 1617, ein heute seltenes Werk, das die erste gedruckte dekadische Logarithmentafel darstellt, gefolgt von seiner *Arithmetica Logarithmica* von 1624 [2, 32].

Briggs verwendet zum besseren Verständnis seiner Darlegungen eine kleine Tafel[5]. Sie trägt fünf Spalten mit Zahlen.

---

4 Stifel [38], fol. 249v, Übersetzung aus Stifel 2007, S. 381

5 Briggs [2], *cap. primum*, S. 1

Die Zahlen in der linken Spalte bilden eine geometrische Folge mit dem Multiplikator 2. Briggs nennt die Elemente dieser Zahlenfolge *numeri proportionales*, proportionale Zahlen oder Proportionalzahlen, weil sie in gleichen Abständen betrachtet zueinander proportional sind. Briggs Erläuterungen sind ebenso wie das Argumentieren seiner Zeitgenossen durchwegs vom Denken in Proportionen bestimmt.

	A	B	C	D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
numeri Propor-tionales.	Logar	Logar	Logar	Logar

Die Zahlen in den Spalten rechts, mit A bis D überschrieben, bilden arithmetische Folgen mit auf- oder absteigenden Zahlenwerten und mit in jeder Spalte unterschiedlichen Differenzen. Diese Folgen sind unten mit *Logar*, der Abkürzung von *Logarithmi*, Logarithmen, benannt. Gemeint sind die Zahlen in den Folgen.
Das Wort Logarithmus stammt von Napier, der mit Briggs in engem Austausch zum Thema Logarithmen stand.

Mit dieser Tafel lässt sich zeigen, dass die Folgen der Logarithmen unterschiedliche Differenzen und Relativpositionen aufweisen können (d=1 in A und B, in B nicht mit 1 beginnend sowie d=3 in C und D, in C aufsteigend, in D absteigend). Wesentlich ist die Konstanz der Differenz in einer Folge.

Napier baut auf dem gleichen Prinzip auf und nennt als erster in seiner Tafel die Zahlen der arithmetischen Folge Logarithmen.
Der Begriff Logarithmus ist eine Zusammenstellung aus den griechischen Wörtern *logos* (Wort, Vernunft, Rechnung, auch Verhältnis) und *arithmos* (Zahl). In dieser Wortwahl liegt die Bedeutung von Logarithmus als Rechenzahl. Napier könnte auch mit Bezug auf die Proportionen eine Verhältniszahl gemeint haben, weil, wie weiter unten noch gezeigt werden wird, Logarithmen in dieser historischen Definition eng mit Proportionen der Numeri in der geometrischen Zahlenfolge verbunden sind.

Vor seiner Logarithmentafel *Descriptio* hatte Napier das Werk *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (Aufbau des wunderbaren Kanons der Logarithmen), eine Beschreibung von Aufbau und Berechnung seiner Logarithmentafel [27], verfasst und dort die Proportionalzahl „natürliche Zahl“ (*numerus naturalis*), ihren Logarithmus noch „künstliche Zahl“ (*numerus artificialis*) genannt. Künstlich im Gegensatz zu natürlich könnte hier auch die naheliegende Bedeutung von kunstvoll, zu einem bestimmten Zweck vom Menschen geschaffen, tragen, eine im Barock gebräuchliche Bewertung.

Die *Constructio* erschien allerdings erst nach seinem Tode und somit nach der *Descriptio*. Herausgeber war sein Sohn Robert Napier. Er ergänzte im Druck auf den Seiten 5 und 13 den Begriff *artificialis* (künstlich) in *tabula artificialis* (künstliche Tafel) und *numerus artificialis* (künstliche Zahl) durch eine Markierung mit Sternchen, die zur Randbemerkung *Logarithm(us)* führt. Damit lässt er den originalen Text unverändert und weist auf die inzwischen geänderte Benennung hin. Das folgende Bild ist ein Ausschnitt der Seite 5 in der Ausgabe 1619.

*TABVLA * Artificialis, est minima Tabula, cujus operâ facillimo computu omnium Geometricarum dimensionum, motuumque sublimium habetur notitia.* ** Logarithmi.*

Der Inhalt des hier und zu dieser Zeit verwendeten Begriffs Logarithmus muss präzisiert und damit von der modernen Definition abgegrenzt werden, weil er sich inhaltlich von letzterer unterscheidet.
Mit dem historischen Logarithmus einer Zahl *Z* ist alleinig die Zuordnung einer zweiten Zahl zu *Z* unter einer bestimmten Voraussetzung gemeint, der Logarithmus ist keine Funktion von *Z*.

Aus dieser Zuordnung ergibt sich eine Gesetzmässigkeit, die Napier zum Ausdruck bringt mit
„*die Logarithmen proportionaler Grössen oder Zahlen sind gleich im Abstand*“[6].

Briggs formuliert identisch
„*Logarithmen sind Zahlen, die, Proportionalzahlen zugeordnet, gleiche Differenzen liefern*“[7]

Auf der Basis der Definitionen von Napier und Briggs lautet der fundamentale Satz des Rechnens mit historischen Logarithmen in einer leicht abgeänderten sprachlichen Fassung

Wenn zwei Zahlenpaare den gleichen Quotienten besitzen sind auch die Differenzen ihrer Logarithmen gleich. (0)

Dieser Satz erhält in Kurzfassung mit mathematischen Symbolen die Form:

wenn für zwei Zahlenpaare (p, r) und (s, t) die Beziehung zutrifft

$$\frac{p}{r} = \frac{s}{t} \quad \text{dann gilt} \quad \log p - \log r = \log s - \log t; \tag{1}$$

Die Richtigkeit ergibt sich unmittelbar aus dem Aufbau der geometrischen und der arithmetischen Zahlenfolge, wie eine frei gewählte Gegenüberstellung verdeutlicht:

		r		**p**			**t**		**s**
Num Z	3	6	12	24	48	96	192	384	768
Log (Z)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Napier formuliert nach Umstellung der Summanden
„*Bei den Logarithmen von vier Zahlen in Proportion ist die Summe des zweiten und des dritten minus der erste gleich dem vierten*.“ [8]

6 Napier 1614 *Descriptio* [25], S..5, Kap. II, propositio 1: „*Proportionalium numerorum, aut quantitatum, aeqi-differentes sunt Logarithmi.*“

7 Briggs 1624 [2] Kap. I.: „*Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti aequales differentias*“.

8 Napier 1614 *Descriptio* [25], S..5, Kap. II, propositio 4: „*Ex quatuor proportionalium Logarithmis, aggregatum secundi & tertii minutum primo, aequatur quartio.*“

Da die Zahlen Z der Folge der Proportionalzahlen angehören kann man auch von der **proportionalen Definition** des Logarithmus sprechen.

Eine Basiszahl oder einen Exponenten nach moderner Auffassung gibt es nicht, weil die Definition nach (1) für jede Gegenüberstellung gültig ist.
Die obige Definition bringt mit sich, dass eine Grundaufgabe mit Hilfe von Logarithmen nur gelöst werden kann, wenn sie zur Beziehung (1) umformuliert wird. Daraus ergeben sich die Regeln[9] für die Rechenarten

Multiplizieren

$$p = r \bullet s \text{ oder } \frac{p}{r} = \frac{s}{1} \text{ und somit } \log p = \log r + \log s - \log 1; \tag{2}$$

Dividieren

$$p = \frac{r}{s} \text{ oder } \frac{p}{1} = \frac{r}{s} \text{ und somit } \log p = \log r - \log s + \log 1; \tag{3}$$

Potenzieren

$$p = r^n \text{ ; aus } \frac{p}{r} = \frac{r^{n-1}}{1} \text{ folgt } \log r^n = n \bullet \log r - (n-1) \bullet \log 1; \tag{4}$$

Radizieren

$$\mathrm{p} = \sqrt[n]{r} \text{ bzw. } p^n = r \text{; daraus } \log \sqrt[n]{r} = \frac{1}{n} \bullet \log r + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \bullet \log 1; \tag{5}$$

In allen Regeln tritt die Konstante log 1 auf. Mautz [24] nennt sie einen „lästigen Begleiter“. Der Wert von log 1 entspricht der Zahl, die in der Gegenüberstellung der Folgen der Zahl Z = 1 in der geometrischen Folge zugeordnet ist. Sie verschwindet demnach nur, wenn diese Zuordnung den Wert Null erhält, also $\log 1 = 0$ gesetzt wird.

In einer Proportionsrechnung der ursprünglichen Form

$$p = \frac{r \cdot s}{t} \quad (t \neq 1) \text{ oder } \log p = \log r + \log s - \log t \tag{6}$$

oder in manchen anderen zusammengesetzten Rechnungen tritt die Konstante log 1 nicht auf, weil sie gekürzt werden kann.

Die oben aufgeführten Rechenregeln ergeben sich bei Verwendung zweier Zahlenfolgen mit ihren zugeordneten Elementen, eine Basiszahl in modernem Sinn ist nicht enthalten. Die findet man nur in Gegenüberstellungen mit der Zuordnung log 1 = 0. Die graphische Darstellung hierzu sieht wie folgt aus:

Geometrische Folge	1	q	q^2	q^3	…	q^n
Arithmetische Folge	0	d	$2d$	$3d$	…	nd

9 S. hierzu auch die Ableitungen bei Mautz 1919 [24].

Hier lautet die Basiszahl $b = q^{1/d}$ oder $\log_{q^{1/d}} q^n = nd$. (7)

Auf diese Zuordnung mit $q = 10$ und $d = 1$ haben sich Napier und Briggs schliesslich geeinigt. Dazu weiter unten mehr.

Eine ergänzende Anmerkung sei eingefügt: Die Grundrechenaufgaben oben wurden mit der Zahl 1 zur Proportion erweitert. Möglich ist auch, dies mit einer Zahl $a > 1$ zu tun. Um den Summanden $\log a$ zu vermeiden, kann man dann $\log a = 0$ setzen. Diese Festlegung hat den Nachteil, dass das Ergebnis korrigiert werden muss und dass diese Gegenüberstellung keine Basis b beinhaltet, weil $b^0 = a$ nicht zutreffen kann.

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass hier mit der Kurzbezeichnung „log" der historische Logarithmus, eine unter einer bestimmten Voraussetzung frei wählbare Zuordnung, gemeint ist und nicht der Logarithmus zur Basis 10. Letzterer lässt noch etwa einhundert Jahre auf sich warten.

Frühe Logarithmentafeln

Nach jahrelanger Arbeit – man spricht von 20 Jahren – gelingt es Napier, eine Logarithmentafel zu erstellen, die die Unzulänglichkeit der Tabelle des Typs wie bei Stifel überwindet. Seine Berechnungen stützen sich auf ein kinematisches Modell, in dem sich zwei Punkte linear bewegen und mit ihren unterschiedlichen Geschwindigkeiten die zugeordneten Zahlenfolgen erzeugen.

Seine Tafel gibt die Winkelfunktionen für einen Radius von 10^7 , d.h. als siebenstellige ganzzahlige Werte, für Winkel in Schritten von ganzen Minuten sowie deren Logarithmen nach dem Napierschen System. Sie ist deswegen gut geeignet für trigonometrische Berechnungen, wird jedoch unhandlich für Zahlenwerte grösser als 1. Das sieht auch Napier ein und entwirft nach der Fertigstellung ein neue Logarithmentafel mit anderem Ansatz.

In seiner *Rabdologia* 1617 [26][10] schreibt Napier in der *Dedicatio* (Widmung) er habe eine wesentlich bessere Art von Logarithmen gefunden und wolle sie veröffentlichen, aber seine schlechte Gesundheit hindere ihn daran.
Im Anhang zur *Constructio* präzisiert Napier seine Vorstellungen. Es soll gesetzt werden $\log 1 = 0$ damit diese Konstante in den Rechnungen nicht auftritt sowie $\log 10 = 1 \bullet r$; $\log 100 = 2 \bullet r$ usw. mit $r = 10^{10}$. Ein hoher Wert von r soll gebrochene Zahlen in den Zwischenwerten vermeiden. Die Schreibweise des Dezimalbruchs steht zu dieser Zeit noch nicht auf sicheren Beinen.
Mit dieser Zuordnung verlässt Napier sein dynamisches Modell und setzt neue Fixpunkte in den beiden Folgen.

---

10 Die von Napier entwickelte Rabdologie hat nichts mit Logarithmen zu tun. Es sind Verfahren, die Multiplikationen und Divisionen mit Hilfe von kleinen Stäben oder Streifen, die das kleine Einmaleins tragen, verkürzen.

Briggs war von der Logarithmentafel Napiers begeistert, sah aber ebenfalls deren eingeschränkte Verwendbarkeit und dachte wie Napier an eine Änderung in Form einer Stufung in Potenzen von 10. Sie unterschied sich jedoch von den Vorstellungen Napiers, weil er $\log 1 = 10 \bullet r$; $\log 10 = 9 \bullet r$;…; $\log 10^{10} = 0$ setzen wollte.

Napier und Briggs trafen sich zwei mal und tauschten ihre Ansichten aus. Schliesslich einigten sie sich auf den besseren Vorschlag Napiers $\log 10^n = n$. Hieraus folgt $\log (a \bullet 10^n) = \log a + n \bullet \log 10$ und hier liegt auch die Unterscheidung zwischen Kennzahl und Mantisse des Logarithmus begründet, die das Multiplizieren oder Dividieren mit Potenzen von 10 erleichtert. Der Wert für r ist gross gewählt, um möglichst viele Proportionalzahlen im Intervall 0 bis 1 für genaue Rechnungen zu erhalten und um Dezimalbrüche zu vermeiden.
Die sogenannten Briggschen oder dekadischen Logarithmen sind erstmals von ihm berechnet worden, die Idee der Stufung in Potenzen von 10 kommt von beiden, die heute noch gebräuchliche Zuordnung der Logarithmen zu den Potenzen jedoch stammt von Napier.[11]

Zwei weitere frühe Tafelmacher müssen ebenfalls angesprochen werden.
Johannes Kepler (1571-1630), Astronom, Naturphilosoph und Mathematiker, kannte die Logarithmen von Napier. Er stellte die Theorie der Logarithmen auf eine selbst erarbeitete Grundlage. [15] Seine Rechenmethoden ähneln denen Napiers, auch er ging von der Zuordnung zweier Zahlenfolgen aus, sie sind jedoch auf ganze Zahlen und nicht auf den Sinus ausgerichtet. Er berechnete die Logarithmen neu und veröffentlichte sie in seinem Werk *Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos* (1624), gefolgt von der im Hauptwerk fehlenden Anweisung zum Gebrauch mit dem Titel *Supplementum chiliadis logarithmorum, continens praecepta de eorum usu* (1625).

Etwa zur gleichen Zeit wie Napier begann auch Jost Bürgi (1552-1632), Schweizer Uhrmacher, Mathematiker, Astronom und Erfinder von Instrumenten, mit der Berechnung einer Logarithmentafel. Sie erschien unter dem Titel *Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen.* [3, 31, 40] Der Titel spricht die beiden Zahlenfolgen direkt an. Im *Gründlichen Unterricht*[12] zu seiner Tafel beschreibt er das Rechnen mit Hilfe arithmetischer und geometrischer Folgen und nennt dazu die Schriften von Simon Jacob [18] und Moritius Zons [45]. Beide behandeln dieses Thema ebenfalls. Bürgi führt aus:

11 S. a. Gibson 1915 [12], S. 11. Zu Details der Vorschläge verweise ich auf meinen Beitrag Weiss 2013 [42].

12 Die Vorrede fehlt in den Tafeln, sie ist bei Gieswald 1856 [11] und bei Lutstorf 1992 [21] abgedruckt.

Arithmetisch	*0.*	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.* *)
	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.

Wir haben in der Vorredt angeregt, wie auch von etlichen Arithmeticis Simon Jacob Moritius Zons und andere ist berürt worden, das was in der Geometrischen Progress oder in der Schwarzen Zahl Multipliciert daßelbige ist in der Arithmetischen Progress oder in der rothen Zahl addiern, Alß zum Exempel mann soll multipliciren 8 mit 64. Die rothe Zahl von 64 ist *6* und von 8 ist *3*. Der Summa ist *9*, denn *6* und *3* ist *9*. Dieße schwarze Zahl ist 512 und soviel kombt auch, so man 8 mit 64 multipliciert.

*) Alle hier und im Folgenden cursiv und mit Schwabacher Schrift gedruckten Ziffern und Worte sind im Manuscripte roth geschrieben. G.

Bürgi baut seine Tafel schrittweise auf nach folgenden Schema:

$10^8\bullet$	1	$1{,}0001^1$	$1{,}0001^2$	$1{,}0001^3$	$1{,}0001^4$	...
	0	10	20	30	40	...

Mit diesem Aufbau übernimmt Bürgi unmittelbar die ihm aus der Literatur bekannte Anordnung aus geometrischer und arithmetischer Folge.
Über den Wertebereich der Numeri und die Darstellung des Dezimalbruchs existieren unterschiedliche Auffassungen, die hier nicht weiter verfolgt werden sollen.

Bürgi nennt die den Numeri zugeordneten Zahlen rote Zahlen, sie sind in der Tafel auch so gedruckt, der Begriff Logarithmus ist noch unbekannt.
Die Tafel ist ihrem Aufbau nach eine Antilogarithmentafel, weil die roten Zahlen als Eingang fungieren. Wer den Logarithmus zu einem Numerus sucht, muss diesen in den tabellierten Werten suchen.

Bürgis Tafel wurde erst 1620, also nachdem Napiers Arbeit hierzu bereits bekannt war, und unter widrigen politischen Verhältnissen veröffentlicht. Sie blieb weitgehend unbekannt.

Die funktionale Definition

Die heute geläufige Definition des Logarithmus einer Zahl Z als jene Zahl p, mit der man eine Basiszahl b potenzieren muss um Z zu erhalten, also $Z = b^p$ und $p=\log_b Z$ (b>0 und b≠1), setzt sich ab der Mitte des 18. Jahrhunderts allmählich durch, nicht zuletzt auf Grund der Arbeiten von Leonhard Euler zu diesem Thema und der vereinheitlichten Schreibweise von Potenzen. Aus den Regeln des Rechnens mit Exponenten ergibt sich, dass $\log 1 = 0$ gesetzt werden muss. Auf eben diese Zuordnung war man bei der Gegenüberstellung zweier Zahlenfolgen aus Gründen der Vereinfachung auch gekommen.

Mit dieser neuen Auffassung versuchte man nachträglich auch in den aus der proportionalen Definition entstandenen Logarithmentafeln eine Basiszahl zu finden. Die Rückrechnungen gestalten sich dann einfach, wenn in der proportionalen Definition log 1 = 0 gesetzt ist. In anderen Fällen waren die gewonnenen Erkenntnisse zum Teil falsch, zumindest wenig ergiebig, weil die Basiszahl in der proportionalen Definition nicht auftritt und zudem den Vorstellungen der Tafelmacher widersprach. [24]

Soweit bekannt ist die erste Logarithmentafel, die die neue Definition im Vorwort bringt, Gardiner *Tables of Logarithms*, London 1742 [9]. Dort ist auf S. 1 zu lesen:

> I. *The definition and notation of Logarithms.*
>
> THE common Logarithm of a number is the Index of that power of 10, which is equal to the number: That is, The Logarithm of any number $a = \overline{10|}^{+x}$, or $\overline{10|}^{-x}$, is $+x$, or $-x$.
> Hence in the decimal ſeries of numbers, the logarithms of the numbers $\overline{10|}^{3}$, $\overline{10|}^{2}$, $\overline{10|}^{1}$, $\overline{10|}^{0}$ (or 1), $\overline{10|}^{-1}$, $\overline{10|}^{-2}$, $\overline{10|}^{-3}$, are $+3$, $+2$, $+1$, 0, -1, -2, -3.

Die Basiszahl 10 hat sich durchgesetzt, die Schreibweise der Potenzen von 10 entspricht noch nicht unserer modernen, lässt jedoch die Bedeutung klar erkennen.
Da es sich hier um eine Funktion $p = \log_b Z$ handelt, die zudem stetig ist, liegt nahe, von der neuen **funktionalen Definition** des Logarithmus zu sprechen. Eine Wertetabelle der Funktion, die Logarithmentafel, dient als Rechenhilfe.

Im Vergleich der proportionalen mit der funktionalen Definition tritt die Frage auf, ob Briggs die Logarithmen zur Basis 10 berechnet hat, wie oft behauptet wird. Abgesehen von einem konstanten Multiplikator $r = 10^{15}$ ist das auch richtig. Allerdings geht Briggs von einer Gegenüberstellung zweier Zahlenfolgen aus, ohne den Begriff einer Basiszahl. Die Zuordnungen sind mit $\log 10^n = n$ so gewählt, dass Numeri und Logarithmen auch der späteren funktionalen Definition des Logarithmus zur Basis 10 entsprechen.

Die Definition in Lehrbüchern

Die Durchsicht einer Auswahl von massgeblichen Lehrbüchern zum Thema Mathematik und Rechentechnik macht die Übergänge von der proportionalen zur funktionalen Definition des Logarithmus sichtbar.

In seinem Werk *A Treatise of Algebra* 1685 [41] erklärt John Wallis den Logarithmus aus den Gegenüberstellungen einer geometrischen Folge, die mit 1 beginnt, zu einer arithmetischen Folge mit der Zuordnung $\log 1 = 0$. Letztere Zuordnung hat sich durchgesetzt, weil sie das Rechnen mit den Zahlen der arithmetischen Folge, den Exponenten, vereinfacht. Gleichermassen ist auch die Stufung von 1 in den Exponenten zweckmässig gewählt.

In einer Darstellung auf S. 56 führt Wallis nicht nur das Rechnen mit Exponenten vor, er zeigt auch, dass man zwischen den Zuordnungen interpolieren kann, hier ausgeführt mit dem arithmetischen Mittelwert e/2 zwischen zwei Exponenten, der dem geometrischen Mittelwert $\sqrt{r}$ zweier Argumente entspricht.

The Terms,	1.	r.	rr.	rrr.	r^4.	r^5.	r^6.	&c.
Exponents,	0.	e.	$2e$.	$3e$.	$4e$.	$5e$.	$6e$.	&c.

Then, as $rr \times r^3 = r5$, and $rr\sqrt{r} \times rrr = r^5\sqrt{r}$;

So $2e + 3e = 5e$, and $2\frac{1}{2}e + 3e = 5\frac{1}{2}e$.

Bemerkenswert an der ersten Zeile ist die Schreibweise der Potenzen, der hochgestellte Exponent wird erst ab dem Wert 4 verwendet. Mit hochgestellten Zahlen hat der Drucker offensichtlich Schwierigkeiten, was das Lesen erschwert.

Mit der Stufung $e = 1$ der Exponenten arbeitet Wallis eine weitere Eigenschaft des Logarithmus heraus. Der Logarithmus einer Zahl $\log r^n = n$ gibt an, wie gross ihr Verhältnis zur Grundzahl ist. Man nannte dieses Verhältnis die Verhältniszahl oder *number of proportions.* Gemeint ist die Anzahl der Verhältnisse bis zur Position dieser Zahl in der Folge. Wallis verweist an dieser Stelle auf eine der möglichen Bedeutungen des Begriffs Logarithmus.[13]

Mit Rückgriff auf seine Erläuterungen erklärt Wallis den Aufbau einer Logarithmentafel, für die das Verhältnis $r = 10$ gilt.
Die Definition des Logarithmus lautet bei ihm

> *„And these Exponents they call Logarithms, which are Artificial Numbers, so answering to the Natural Numbers, as that the Addition and Subduction of these, answers to the Multiplication and Division of the Natural Numbers."*[14]

Die natürlichen und die künstlichen Zahlen sind nach wie vor präsent, eine Basiszahl gibt es explizit nicht.

Vom Begriff Logarithmus als Verhältniszahl geht auch Benjamin Martin in seiner *Logarithmologia* 1740 [23] aus:

> *„1. The best Definition of those Numbers we call Logarithms is contain'd in the very Name or Word (Logarithm) itself;* [...] *and a Logarithm is no other than a Number, which*

13 Wallis 1685 [41], S. 57. Da diese Eigenschaft auch für die Zuordnungen $\log z = 0$, $\log z \cdot q = 1$, …, $\log z \cdot q^n = n$ zutrifft und diese dem Ansatz von Napier entsprechen sieht Cajori schon hier die Bedeutung von Logaritmus als Verhältniszahl und nicht nur Rechenzahl (Cajori 1913 [5]. S. 7).

14 Wallis 1685 [41], S. 57.

denotes or shews what Number of Ratio's is contain'd between Unity, and that Number of which it is said to be the Logarithm.“[15]

Er erläutert eingehend die Eigenschaften der beiden Zahlenfolgen, die dieser Definition zugrunde liegen sowie die Gesetzmässigkeiten, die sich aus den Zuordnungen ihrer Elemente ergeben. Weiter führt er aus, es müsse $\log 1 = 0$ gewählt werden weil andernfalls die vereinfachten Anwendungsregeln der Logarithmen nicht gelten. Die Zuordnungen $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$ usw. bringe Vorteile mit sich, weswegen sie auch als Grundlage der Logarithmentafeln gewählt worden sind. Ein weiteres Kapitel hat das Berechnen der Zwischenwerte zum Inhalt.

Im weiteren Verlauf seiner Ausführungen geht Martin über die proportionale Definition hinaus und definiert den Logarithmus mit Hilfe der Potenzschreibweise:

„3. From hence you observe, that the Exponents of the Powers of the Terms in the Series 1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 &c. are the Logarithms of those Terms respectively.“[16]

Anlass hierfür ist der Rückgriff auf eine „mehr universelle Theorie“, mit der er die Natur der Logarithmen mit Hilfe von geometrischen Darstellungen erklärt.
Auffallend ist die Existenz zweier Definitionen nebeneinander und deren Trennung in eine arithmetische und eine analytische Ebene.

Eine gleichartige Trennung findet man in der Encyclopédie von Diderot 1756. Im Abschnitt *Logarithme* [1] wird der Logarithmus aus der Gegenüberstellung zweier Zahlenfolgen abgeleitet und definiert. In methodisch gut aufgebauten Erläuterungen werden der Vorteil von $\log 1 = 0$, die Grundrechenarten einschliesslich Wurzeln und Potenzen mit Logarithmen sowie der Aufbau der existierenden Tafeln mit Stufen der Potenzen von 10 angesprochen. Eine Definition des Logarithmus als Exponent einer Potenz fehlt an dieser Stelle. Stattdessen folgt nach einigen Beispielrechnungen mit Logarithmen der Hinweis, dass diese Gesetzmässigkeiten sowohl aus der Theorie der Logarithmen, wie oben gegeben, abgeleitet werden können, sie können jedoch auch anhand der Theorie der logarithmischen Kurve veranschaulicht werden. Die Abschnitte *Logarithmique* (Bd. 9) über die logarithmische Kurve und *Exponentiel* (Bd. 6) über die exponentielle Schreibweise behandeln u.a. die logarithmische und die Exponentialfunktion.
Die Verbindung beider Definitionen liegt allein in der Nennung beider Quellen.

Bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts steht in den Erklärungen zum Logarithmus die Gegenüberstellung zweier Zahlenfolgen im Vordergrund.
Girtanner geht in seinen Logarithmentafeln 1794 [13] von dieser Methode aus. Die Zahlen in der arithmetischen Folge sind die Logarithmen. Es gilt von Anfang an $\log 1 = 0$. Der Logarithmus ist eine Verhältniszahl:

„§12. Das Wort Logarithmus, kann im Deutschen am schicklichsten durch Verhältniszahl ausgedrückt werden, weil die Zahl der arithmetischen Reihe, wie im vorigen Abschnitte zu sehen ist, in der That immer das Verhältnis der über ihr stehenden Zahl der geometrischen Reihe angiebt.“[17]

---

15 Martin 1740 [23], Chap. I und II.

16 Martin 1740 [23], Chap. III.

17 Girtanner 1794 [13], S. 4.

Der Autor weist in §9 kurz darauf hin, dass sich die Zahlen der geometrischen Folge auch als Potenzen der Form 1, a, a^2, a^3 usw. schreiben lassen, geht jedoch auf diese Basiszahl selbst nicht ein. Das „briggische System" kommt bei ihm nur mit seiner Eigenschaft log 1 = 0, log 10 =1 kurz zur Sprache.

Das *Mathematische Wörterbuch* 1808 [20] von Georg Simon Klügel ist insofern bemerkenswert, als es eine neue Sicht auf die Definitionen bringt. Der Autor vereint beide Definitionen des Logarithmus, indem er die Potenzschreibweise einer Zahl zeigt, damit den Logarithmus definiert und gleichzeitig aufzeigt, dass in der Gegenüberstellung der Zahlenfolgen die Potenzen enthalten sind. Eine solche Gegenüberstellung bildet bei ihm ein logarithmisches System.

> *„5. Die Verbindung einer geometrischen Reihe mit der arithmetischen Reihe der Stellenzahlen ihrer Glieder, oder die Verbindung der Zahlen, als Potenzen einer gegebenen Zahl betrachtet, und der Exponenten, macht ein logarithmisches System aus. Die Stelle der Einheit in der geometrischen Reihe wird durch 0 bezeichnet. Das Glied, dessen Stelle die Einheit ist, oder die gemeinschaftliche Wurzel der Potenzen, welche für die Zahlen gesetzt werden, heißt die Grundzahl oder Basis des logarithmischen Systems. Diese ist willkürlich, so daß es unendlich viele logarithmische Systeme giebt. Es kommt nur darauf an, auszumachen, welches das bequemste ist, es sey zur Anwendung oder zur Berechnung der Logarithmen."*[18]

Die etwas unklare Feststellung in der Mitte des Zitats wird weiter unten präzisiert:

> *„Betrachtet man die Logarithmen als Exponenten einer Potenz, so daß $z=a^m$, so ist nothwendig $m=0$, wenn $z=1$ ist."*[19]

Dazu gibt Klügel die bekannte Begründung: nur unter dieser Voraussetzung (log 1 = 0) gelten die vereinfachten Rechenregeln mit Exponenten.

Schema
der auf Seite 1 stehenden Potenzen mit anderer Bezeichnung.

Logarithmen (Exponenten)	Numeri (Potenzen)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
u. s. f.	u. s. f.

In seinem *Lehrbuch der Logarithmen* 1884 [19] weicht Adolph Kleyer nur wenig von den Ausführungen in Klügels Mathematischem Wörterbuch ab.
Ein Potenzensystem besteht aus der Aufeinanderfolge von Potenzen mit ganzen Exponenten, hier vom Autor beispielhaft an der Basiszahl 2 gezeigt.

Die Logarithmen (Exponenten) bilden eine arithmetische Folge, die Numeri (Potenzen) ausgeschrieben eine geometrische. Kleyer arbeitet mit dem Begriff Verhältniszahl.

> *„Erklärung 4. [...] Da nun die Glieder der zweiten Reihe durch Potenzierung aus den Gliedern der ersten Reihe hervorgegangen sind, mithin die Glieder beider Reihen eine gewisse Abhängigkeit von einander haben, d. h. in gewissen Beziehungen, in gewissen Verhältnissen zu einander stehen [...] so nennt man die in der ersten Reihe stehenden Zahlen,*

18 Klügel 1808 [20], S. 484ff., Abschn. Logarithmus. Die Hervorhebungen sind auch im Original enthalten.

19 Klügel 1808 [20], S. 487.

> *also die Exponenten, **Logarithmen** – d. h. **Verhältniszahlen** der in der zweiten Reihe stehenden Zahlen (Potenzen).“*[20]

Danach kommt Kleyer auf die Charakteristik eines Logarithmensystems zu sprechen.

> *„Erklärung 5. Analog der Bezeichnung in der Erkl. 4 nennt man ein vollständiges Potenzensystem ein **logarithmisches** System oder **Logarithmensystem**. Sind in einem solchen die Numeri (Potenzen) geordnet zusammengestellt, so nennt man ein solches Verzeichnis eine **Logarithmentafel** oder **Logarithmentabelle.**“*

Die vorgestellten Beispiele lassen erkennen dass in den Lehrbüchern mathematischen Inhalts vom späten 17. bis in das 19. Jahrhundert für die Beschreibung des Logarithmus zunächst nur die erste, später dann zwei Definitionen getrennt voneinander herangezogen werden. Es sind dies die Gegenüberstellung zweier Zahlenfolgen und die Potenzschreibweise. Anfangs stehen noch beide gleichwertig nebeneinander. Im weiteren Verlauf wird der Schwerpunkt auf die Identität beider Definitionen gelegt bis schliesslich die Potenzschreibweise deutlich in den Vordergrund tritt. Auffallend ist dabei, dass sich die proportionale Definition sehr lange behauptet. Neben einer schlichten Tradierung von Bekanntem wird der Grund hierfür auch darin liegen, dass das Erarbeiten einer Gegenüberstellung methodische Vorteile in den Beschreibungen mit sich bringt. Vereinzelt zieht sich der Übergang der Definition des Logarithmus vom proportionalen zum funktionalen Ausgangspunkt bis in den Anfang des 20. Jahrhunderts hinein. [21]

Anleitungen für Rechenschieber

Das Verfahren des Rechnens mit Logarithmen hat eine herausragende und für ca. 350 Jahre einflussreiche Erfindung unter den Rechenhilfsmitteln hervorgebracht, nämlich den logarithmischen Rechenstab oder Rechenschieber. Anleitungen für den Rechenschieber wollen dieses neue Gerät zunächst vorstellen und dann den Benutzer dessen Handhabung lehren. Dabei stehen die Lehre der Anwendung, des Gebrauchs, die Vermittlung dieses Wissens und ihre Methodik im Vordergrund, während die mathematischen Grundlagen eine Nebenrolle spielen. Die Anwendung bedarf keiner Kenntnis über die Theorie der Logarithmen.
Die Durchsicht der Anleitungen zum Gebrauch mit der Frage, ob und wie das Prinzip der Logarithmen nebenbei erklärt wurden und mit welcher Methode, fördert unterschiedliche Ansätze zutage.

Bis in das 19. Jahrhundert hinein wurde der Gebrauch des Rechenschiebers mit Handlungsanweisungen gelehrt in der Abfolge Vormachen dann Nachmachen ohne Rückgriff auf irgendwelche Begründungen. [43] Erst danach werden die Anwendungen generalisiert und die Grundlagen der Funktion in die Erläuterungen mit einbezogen.

Sofern die Funktion des Rechenschiebers überhaupt begründet wird kommen zwei Erklärungsmodelle zur Anwendung. Sie sollen verständlich machen, dass Multiplikationen oder Divisionen als Streckenadditionen oder -subtraktionen ausgeführt werden. Es sind dies, wie nicht anders zu erwarten, entweder die historische Auffassung oder die funktionale Definition.

---

20 Kleyer 1884 [19], S. 5f. Die Hervorhebungen sind auch im Original vorhanden.

21 Tropfke 1933 [39], Kap. Logarithmen, S. 206.

Im Folgenden einige Beispiele aus Lehrbüchern, die nur Beschreibung und Handhabung des Rechenschiebers zum Inhalt haben.

Die Mathematisierung des Maschinenbaus hatte zur Folge, dass Maschinen und Bauteile rechnerisch entworfen und vorab geprüft werden können. Man greift dabei auf den Rechenschieber zurück. Er ermöglicht dem Ingenieur sowohl erste Abschätzungen von Grössen als auch genaue Berechnungen.

Im Jahr 1827 erscheint ein Werk des Ingenieurs und Patentanwaltes John Farey Jr. über die Geschichte und die Konstruktion von Dampfmaschinen. [8] In Kapitel VII geht er auf die Anwendung des Rechenschiebers für die Dimensionierung von Bauteilen ein. Zu Logarithmen schreibt er

> *„LOGARITHMS are a series of artificial numbers, adapted in a particular manner to a series of real numbers, and arranged in a table, wherein every real number has its corresponding logarithm;... (a)"*

Und in der Fussnote dazu

> *„(a) The logarithm of a number is the index of that power of ten which will produce the number. Hence the logarithm is one more, than the number of times that ten must be multiplied by itself, to produce the number which the logarithm represents...*
>
> *It follows from this construction of logarithms. that they will form a series which increases in arithmetical progression, whilst the numbers which they represent, form a series which increases in geometrical progression; and the two series are so adapted to each other, that 0 in the arithmetical series corresponds to 1 in the geometrical series.*

Thus	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*&c. Logarithms forming an arithmetical series.*
	1	*10*	*100*	*1000*	*10000*	*100 000*	*&c. Numbers forming a geometrical series.*

> *This is the skeleton of a table of logarithms, for all the intermediate number between 1 and 10, 10 and 100. &c.. in the geometrical series, may be filled up..."*[22]

Farey erklärt, dass der Logarithmus einer Zahl jener Exponent in einer Potenz von 10 sei, der eben diese Zahl repräsentiert. Gleichzeitig verwendet er die historische Definition der künstlichen Zahlen und zeigt auf, wie beide Definitionen miteinander verbunden sind.

Mit Farey vergleichbare Inhalte bringt fünfzig Jahre später der Ingenieur Thomas Dixon. Er veröffentlicht 1875 eine Abhandlung über die Ausgestaltung und den Gebrauch des Rechenschiebers [7]. Darin stellt er auch seinen eigenen Entwurf, der speziell auf die Berechnung von Expansions-Dampfmaschinen eingerichtet ist, vor.[23]

Zunächst geht Dixon auf das Besondere der Logarithmen ein. Er greift dabei wie schon Farey vor ihm auf die historische Gegenüberstellung einer arithmetischen Folge mit geometrischen Folgen zurück und leitet daraus ab

22 Farey [8] 1827, Chap. VII, S. 533.

23 Weiss [44] 2021.

> *„And logarithms being artificial numbers so contrived that the sum of the Logs. of any two numbers = the Logarithm of the Product of those numers…“.*[24]

Logarithmen sind künstliche Zahlen, dergestalt gesetzt, dass Multiplikationen auf Additionen, Divisionen auf Subtraktionen und dergleichen zurückgeführt werden können. Es erstaunt wie lange sich historische Interpretationen auch in der angewandten Mathematik halten. Erst im weiteren Verlauf spricht er die Logarithmen von Briggs mit ihren Zuordnungen log(1)=0; log(10)=1; log(100)=2 usw. an.

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts verlässt der Rechenschieber die mathematisch-fachliche Ebene und wird als Gebrauchsgegenstand angeboten für alle, die in ihrem Beruf rechnen müssen. Zudem wird er in einer standardisierten Form in Deutschland und Österreich bekannt.
Adam Burg, Professor der Mathematik am k.k. Polytechnischen Institut in Wien, gehört zum Kreis der drei Männer, die sich um die Einführung des Rechenschiebers in Österreich bemühen.[34, 35] In seiner Beschreibung des Schieberlineals 1830 [4], gemeint ist mit diesem irreführenden Begriff der Rechenschieber, geht er auch auf die Theorie der Logarithmen ein. Seine ausführlichen Erläuterungen verbinden die Gegenüberstellung der zwei Zahlenfolgen mit den Elementen der Schreibweise einer Potenz. Eine begriffliche Unterscheidung zwischen künstlichen und natürlichen Zahlen nimmt er nicht vor.

Mit nur wenigen Jahren Abstand zu Burg versucht Eduard Harkort den Rechenschieber, dessen Prinzip er in England kennengelernt hat, auch in Deutschland bekannt zu machen. Der Rechenschieber ist bei ihm Teil des schon seit längerem bekannten universalen Rechengerätes Proportionalzirkel [35] Seine Schrift über das *Plani-stereometrische Schieblineal* erscheint 1824 [16]. Sie enthält neben ausführlichen Erläuterungen zum Gebrauch des Gerätes auch einen Abschnitt über dessen Theorie. Darin spricht der Autor die Vorteile des Rechnens mit Logarithmen sowie die Teilungen logarithmischer Skalen an. Weiter geht er nicht.

Im Vergleich zu den Ausführungen von Burg muss berücksichtigt werden, dass ersterer auf der akademischen Ebene agiert und deshalb die Theorie mit einbezieht, weil er fachspezifisches Vorwissen bei den Lesern voraussetzen kann. Harkort schreibt für Praktiker, *„für Künstler und Handwerker des technischen Faches: Für die Werkstätten der Artillerie, Ingenieure, Baubeamte, Mechaniker, Zimmermeister, Steinhauer, Kupfer- und Blecharbeiter, Fabrikanten etc“,* die er in Auswahl auch im Titel nennt, und legt den Schwerpunkt auf die Anwendung des Gerätes in technischen Gewerben.

Der oben zitierte Eduard Harkort umfasst den angesprochenen Personenkreis ebenso wie Ernest Sedlaczek in seiner Anleitung für den Rechenschieber 1851 [36] auf der Titelseite: *„Zunächst für Mechaniker, Techniker in jedem Fache, Chemiker, Fysiker, Mathematiker; ingleichen für Buchhaltungs- und Kameralbeamte, Kapitalisten und Militärs.“*

Völlig verschwunden sind Rückgriffe auf die historische Definition deswegen noch nicht. Für die US-amerikanische Firma Keuffel & Esser verfasst William Cox gegen Ende des 19. Jahrhunderts Beschreibungen und Hinweise zur Handhabung zu Rechenschiebern aus ihrer Produktion. In einigen Schriften greift er dabei auf die Gegenüberstellung zweier Zahlenfolgen zurück:

---

24 Dixon [7] 1875, S. 8.

> *„2d. Logarithms are a series of numbers in Arithmetical Progression (as 0,1,2,3,4, etc.), corresponding to another series of numbers in Geometrical Progression (as 1,2,4,8,16, etc.)*
> *We will take two such series and place them together, thus:-*
>
> | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5 [...]* | *10* |
> | *1* | *2* | *4* | *8* | *16* | *32 [...]* | *1024* |
>
> *Here the first line is a series of numbers in A.P. and they are the logarithms of the corresponding numbers in the second line, which is a series of numbers in G.P.*"[25]

Die Zahlenfolgen dienen ihm zudem für die Erläuterung wie eine logarithmische Skala geteilt ist. Daran schliessen sich die Verfahren des Rechnens mit Logarithmen an. Ein Hinweis auf die Existenz einer Basiszahl wird nicht gegeben.

Fachlich präziser äussert sich der Ingenieur Charles Pickworth in seiner Anleitung für den Rechenschieber mit Fokussierung auf den Typ Mannheim.[28] Er spricht die beiden Zahlenfolgen kurz an, geht dann mit der Bemerkung, dies sei präziser, unmittelbar auf die Potenzschreibweise zur Basis 10 ein.

> *„Logarithms may be defined as a series of numbers in arithmetical progression, as 0, 1, 2, 3, 4, etc., which bear a definite relationship to another series of numbers in geometrical progression as 1, 2, 4, 8, 16 etc. A more precise definition is: – The common logarithm of a number is the index of the power to which 10 must be raised in order to equal the given number.*
> *[...]*
> *Tabulating these results and extending the method we have: –*
>
> | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|
> | *Numbers* | *1* | *10* | *100* | *1000* | *10,000* |
> | *Logarithms* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4.*"[26] |

Die Erläuterungen zur Anwendung der Logarithmen sind ausführlich und detailliert, eine kleine Tabelle der Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10 dient für die Unterscheidung von Mantisse und Charakteristik.

Eine zunehmende Zahl von Schriften erscheint, die bestimmte Typen oder Baumuster von Rechenschiebern vorstellen, abgeleitet aus dem Grundtyp Mannheim. Im Gegensatz zu den vorgestellten Anleitungen konzentrieren sich die Autoren nur noch auf den Aufbau und die Anwendung des Rechenschiebers, die Theorie der Logarithmen tritt dabei in den Hintergrund oder bleibt gänzlich unberücksichtigt. Als Beispiele für diese inhaltliche Reduktion seien genannt

Amédée Mannheim, 1851 [22]. Er führt nur noch aus, dass die Längen der Skalenteilungen 1 bis 2, 1 bis 3, 1 bis 4 usw. proportional zu den Logarithmen der Zahlen sind, bis zur Zahl 10, dem Logarithmus der Einheit.

Franz Rinecker, 1879 [29]. In der Einleitung beschränkt er sich auf die Feststellung, dass der Rechenschieber auf dem Prinzip der Logarithmen beruht, indem Multiplikation und Division zweier Zahlen durch Addition und Subtraktion ihrer Logarithmen, die in einem beliebigen Massstab aufgetragen sind, ersetzt werden.

---

25 Cox [6] 1891, S. 1.

26 Pickworth [28] 1900, S. 10ff.

Anleitungen, die um oder nach 1900 erscheinen und zur Durchsicht zur Verfügung standen, gehen nur noch am Rande oder überhaupt nicht mehr auf die Theorie der Logarithmen ein. Eine solche Randbemerkung umfasst beispielsweise den Hinweis, dass der Rechenstab eine graphische Logarithmentafel darstellt und die Addition oder Subtraktion von Strecken ausführt (Faber-Castell 1922).

Hinsichtlich der Aufnahme von Theorie und Definition der Logarithmen in die Anleitungen für Rechenschieber bietet sich im Überblick das folgende Bild. Frühe Anleitungen, die den Gebrauch des Rechenschiebers nach der Methode Vormachen und dann Nachmachen lehren, beinhalten keine Erklärung des Prinzips Rechnen mit Logarithmen. Etwa ab der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wandelt sich die Methodik. Danach dienen die proportionale oder die funktionale Definition des Logarithmus als Erklärungsmodell, zuweilen nur erstere, von der sehr lange Gebrauch gemacht wird, in anderen Fällen beide. Die Anleitungen sind für Leser mit umfassenden Kenntnissen in der Rechentechnik, wie etwa Ingenieure, geschrieben.

Mit der weiteren Verbreitung und Standardisierung des Rechenschiebers wird ein grösserer Kreis von Anwendern angesprochen, die Grundkenntnisse im Rechnen aber kein mathematisch-theoretisches Hintergrundwissen besitzen. Ein solches wird für die Anwendung des Rechenschiebers auch nicht benötigt, sodass die Definitionen des Logarithmus mehr und mehr in den Hintergrund treten bis sie vollständig verschwinden. Wenn überhaupt bleibt noch eine Erwähnung der Logarithmen mit Hinweis auf die Art der Teilung der Skalen oder auf das Addieren bzw. Subtrahieren von Strecken. Schliesslich wird auch auf diese Anmerkungen verzichtet.

Literaturverzeichnis

[1] d'Alembert, Jean Le Rond u. Diderot, Denis, 1751-1772. Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. 1re éd. 1765, Tome 9, Abschn. *Logarithme*, p. 630-633.
engl. Fleming, David, 2020. Translation from the French of "Arithmétique" from the Encyclopédie of Denis Diderot. URL https://www.academia.edu/44763716/Translation_from_the_French_of_Arithm%C3%A9tique_universelle_from_the_Encyclop%C3%A9die_of_Denis_Diderot_1751_ (letzter Zugriff 4.5.2021)

[2] Briggs, Henry, 1624. *Arithmetica Logarithmica*,
Ders. 2006. *Arithmetica Logarithmica.* Translated and annotated by Ian Bruce.
URL http://www.17centurymaths.com/contents/albriggs.html (letzter Zugriff 4.5.2021)

[3] Bürgi, Jost, 1620. *Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen*
Ders. 2015. *Jost Bürgi's Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen (1620).* Edition and Commentary by Kathleen Clark.

[4] Burg, Adam, 1830. Über die Einrichtung und Anwendung des bei den englischen Mechanikern und Maschinenarbeitern gebräuchlichen Schieberlineals (Sliding Rule). In: *Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes in Wien,* 16. Bd., S. 101-158.

[5] Cajori, Florian, 1913. History of the Exponential and Logarithmic Concepts. In: *The American Mathematical Monthly* 20(1), 1913, S. 5–14.

[6] Cox, William, 1891. *The Mannheim and the Duplex Slide Rules.* Keuffel & Esser, New York.

[7] Dixon, Thomas, 1875, *Treatise on the Arrangement, Application, and Use of Slide Rules,* Bradford. 2ed. with supplement 1881.

[8] Farey, John, 1827. *A treatise on the steam engine: historical, practical, and descriptive.*

[9] Gardiner, William, 1742. *Tables of logarithms for all numbers from 1 to 102100...*

[10] Gemma Frisius, Rainer, 1556. *Arithmeticae practicae methodus facilis.*

[11] Gieswald, Hermann Robert, 1856. Zur Geschichte und Literatur der Logarithmen. In: *Archiv der Mathematik und Physik*, 26, S.316–334.

[12] Gibson, George A., 1915. Napier's Logarithms and the change to Briggs's Logarithms. In: Knott, Cargill Gilston (ed.): *Napier Tercentenary Memorial Volume.*

[13] Girtanner, Johann, Joachim, 1794. *Logarithmische Tafeln zur Abkürzung kaufmännischer Rechnungen.*

[14] Gronau, Detlef, 1989. *The Logarithms - From Calculation to Functional Equations.*
URL https://imsc.uni-graz.at/gronau/LogNeuhof89.pdf (letzter Zugriff 4.5.2021)

[15] Gronau, Detlef, 2016. *Wie die Logarithmen zu ihrem Namen kamen.*
URL https://imsc.uni-graz.at/gronau/Gronau-Miesenbach2016.pdf (letzter Zugriff 4.5.2021)

[16] Harkort, Eduard, 1824. *Plani-stereometrisches Schieblineal für Künstler und Handwerker des technischen Faches: Für die Werkstätten der Artillerie, Ingenieure, Bau-Beamte, Mechaniker, Zimmermeister, Steinhauer, Kupfer- und Blechbearbeiter, Fabrikanten etc.*

[17] Holland, Peter, 2004. *Archimedes – Seine Idee der Logarithmen.*
URL https://www.rechenschieber.org/wordpress/wp-content/uploads/2017/11/Archimedes.pdf (letzter Zugriff 4.5.2021)

[18] Jacob, Simon, 1565. E*in New u. Wolgegruendt Rechenbuch, auff den Linien u. Ziffern...*

[19] Kleyer, Adolph, 1884. *Lehrbuch der Logarithmen: Nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten Beispielen.*

[20] Klügel, Georg Simon, 1808. *Mathematisches Wörterbuch,* 1. Abt., 3. Tl.

[21] Lutstorf, Heinz u. Walter, Max. 1992. *Jost Bürgi's "Progress-Tabulen" (Logarithmen)*. URL https://www.research-collection.ethz.ch/handle/20.500.11850/20427 (letzter Zugriff 4.5.2021)

[22] Mannheim, Amédée, 1851. *Règle à calculs, modifiée par M. Mannheim. Instruction.*

[23] Martin, Benjamin, 1740. *Logarithmologia: or the whole doctrine of logarithms, common and logistical, in theory and practice.*

[24] Mautz, Otto, 1919. *Zur Basisbestimmung der Napierschen und Bürgischen Logarithmen* (Beilage zu den Jahresberichten des Gymnasiums, der Realschule und der Töchterschule in Basel).

[25] Napier, John, 1614. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio Ejusque usus.*
Ders. 2012. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio... & Constructio…*
Translated and annotated by Ian Bruce.
URL http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html (letzter Zugriff 4.5.2021)

[26] Napier, John, 1617. *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo.*
Ders. 1990. *Rabdology*. Translated to english by W. F. Richardson.

[27] Napier, John, ed. Napier Robert, 1619. *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio.*
Ders. 1889. *The construction of the wonderful canon of logarithms.* Translated from Latin into english with notes and a catalogue of the various editions of Napier's works by William Rae McDonald.
Ders. 2012. *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio... & Constructio…* Translated and annotated by Ian Bruce.
URL http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html (letzter Zugriff 4.5.2021)

[28] Pickworth, Charles Newton, 1900. *The Slide Rule: A Practical Manual*, 6th ed.

[29] Rinecker, Franz, 1879. *Der logarithmische rechenschieber und seine practische Anwendung*

[30] Roegel, Denis, 2011. *A reconstruction of the tables of Napier's descriptio (1614).* URL https://locomat.loria.fr/napier/napier1614doc.pdf (letzter Zugriff 4.5.2021)

[31] Roegel, Denis, 2013. *Bürgi's "Progress Tabulen" (1620): logarithmic tables without logarithms.*
URL https://locomat.loria.fr/buergi1620/buergi1620doc.pdf (letzter Zugriff 4.5.2021)

[32] Roegel, Denis, 2014. *A reconstruction of the tables of Briggs' Arithmetica logarithmica.*
URL https://locomat.loria.fr/briggs1624/briggs1624doc.pdf (letzter Zugriff 4.5.2021)

[33] Rudolff, Christoff, 1540. *Künstliche Rechnung mit der Ziffer unnd mit den Zalpfenningen.*

[34] Rudowski, Werner H., 2020. *Rechenschieber im Kaiserreich Österreich - Ungarn (1804 – 1918) im Spiegel österreichischer Zeitungen und Zeitschriften*
URL https://www.rechenschieber.org/wordpress/wp-content/uploads/2020/08/Rechenschieber-im-Kaiserreich-Oesterreich-Ungarn.pdf (letzter Zugriff 4.5.2021)

[35] Rudowski, Werner H., 2012. *Scheffelt & Co. - Frühe logarithmische Rechen-instrumente im deutschen Sprachraum.*
Nachtrag 2012-2021 URL https://www.rechenschieber.org/wordpress/wp-content/uploads/2021/02/Scheffelt-Co-neu-RST.pdf (letzter Zugriff 4.5.2021)

[36] Sedlaczek, Ernest 1851. *Anleitung zum Gebrauche einiger logarithmisch getheilter Rechenschieber.*

[37] Smith, D. Eugene,1915. The Law of Exponents in the Works of the Sixteenth Century. In: Knott, Cargill Gilston (ed.): *Napier Tercentenary Memorial Volume.*

[38] Stifel, Michael, 1544. *Arithmetica Integra,* fol. 249v
Ders. 2007. *Vollständiger Lehrgang der Arithmetik*. Deutsche Übersetzung von Eberhard Knobloch und Otto Schönberger.

[39] Tropfke, Johannes, 1933. *Geschichte der Elementar-Mathematik,* 3. Aufl., 2. Bd. Allgemeine Arithmetik.

[40] Voellmy, Erwin, 1948. Jost Bürgi und die Logarithmen. In: *Elemente der Mathematik* (Beihefte zur Zeitschrift), Vol.5, 1948.
URL https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=emb-001:1948:3::15#82 (letzter Zugriff 4.5.2021)

[41] Wallis, John. 1685. *A Treatise of Algebra.*

[42] Weiss, Stephan, 2013. *Anmerkungen zur Idee der historischen Logarithmen.*
URL http://www.mechrech.info/publikat/IdeeLoga.pdf

[43] Weiss, Stephan, 2017. *Die Methodik des Unterrichts am logarithmischen Rechenschieber in historischer Abfolge.*
URL http://www.mechrech.info/publikat/RS_Methodik_dt.pdf
engl. The Methodology of Teaching a Logarithmic Slide Rule in Historical Sequence. *Journal of the Oughtred Society,* 26:2, Fall 2017.

[44] Weiss, Stephan, 2021. *Die Expansions-Dampfmaschine und der hyperbolische Logarithmus von Farey bis Dixon.*
URL http://www.mechrech.info/publikat/Weiss-Farey_Dixon_expansive-dt.pdf
engl. The Expansion Steam Engine and the Hyperbolic Logarithm from Farey to Dixon. *Journal of the Oughtred Society, Vol. 29:2, Fall 2020, p. 35-40* .

[45] Zons, Moritz, 1616. *Ein new wolgegründtes Kunst- und artigs Rechenbuch auff der Ziffer.*